Jurnal Matematika Vol.7 No.1
November 2007 [9 : 16]

RELASI HOM-TENSOR DALAM KATEGORI KOMODUL

Icih Sukarsih

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
Jalan Tamansari 1 Bandung, 40116, Indonesia

e-mail: sukarsih@yahoo.com

Abstrak. Dalam kategori modul, terdapat hubungan antara Hom dan hasil kali tensor yang dikenal dengan relasi Hom-tensor. Hubungan seperti ini ternyata terdapat juga dalam kategori komodul. Dengan memandang *C*-komodul sebagai *R*-modul serta sifat-sifat dari *C*-komodul dan hasil kali tensor, ternyata relasi Hom-tensor untuk modul tersebut mensyaratkan berlakunya relasi Hom-tensor untuk komodul.

Kata kunci : *komodul, koaljabar, Hom, Hasil kali tensor*

1. Pendahuluan

Dalam aljabar atau teori ring, kita senantiasa mempelajari modulnya, yaitu grup abelian terhadap penjumlahan yang dilengkapi dengan suatu *action* dari aljabar. Demikian juga dalam teori koaljabar, kita dapat mempelajari *R*-modul atas suatu *R*-koaljabar *C* dengan *coaction*. Modul seperti itu dikenal sebagai *C*-komodul, dan untuk setiap *C* yang diberikan, akan terdapat *C*-komodul dan *C*-morfisma atau pemetaan *C*-komodul yang membentuk suatu kategori komodul, yang dinotasikan dengan $\mathbf{M}^C$.

Dalam kategori modul, jika *M* adalah *R*-modul kanan dan *N* adalah (*R*,*S*)-bimodul, maka hasil kali tensor $M \otimes_R N$ adalah *S*-modul kanan, dan $Hom_S(M,N)$ adalah *R*-modul kanan. Jika diberikan *S*-modul kanan *C*, maka terdapat isomorfisma

$$\varphi : Hom_S(M \otimes_R N, C) \longrightarrow Hom_R(M, Hom_S(N,C))$$

yang dinamakan relasi Hom-tensor. Selanjutnya, apakah relasi seperti di atas juga terdapat dalam kategori komodul? Mengingat setiap *C*-komodul dapat dipandang sebagai *R*-modul, tentunya relasi seperti di atas dapat dilakukan. Tulisan ini akan membahas bagaimana relasi Hom-tensor dalam kategori komodul.

2. Hasil Kali Tensor

Definisi 2.1.

Misalkan *R* ring (tidak harus komutatif). Misalkan *M* adalah *R*-modul kanan, *N* adalah *R*-modul kiri dan *G* grup *abelian*. Suatu fungsi $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ disebut *balanced* jika untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, dan $r \in R$ dipenuhi

$$\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$$
$$\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$$
$$\varphi(mr, n) = \varphi(m, rn)$$

Definisi 2.2.

Misalkan R ring. Misalkan M adalah R-modul kanan, dan N adalah R-modul kiri. Pasangan (T,θ) dimana T grup abelian dan $\theta : M \times N \longrightarrow T$ pemetaan *balanced*, disebut hasil kali tensor dari M dan N, dinotasikan dengan $M \otimes_R N$, jika untuk setiap grup abelian G dan untuk setiap pemetaan *balanced* $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ terdapat dengan tunggal homomorfisma $\mu : T \longrightarrow G$ sedemikian hingga diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & G \\ T = M \otimes N \arrow[ur, dotted, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

yaitu, $\varphi = \mu \circ \theta$.

Definisi 2.3.

Misalkan M, M' R-modul kanan, N, N' R-modul kiri, dan $\varphi : M \longrightarrow M'$ dan $\psi : N \longrightarrow N'$ R-modul homomorfisma.

1) Terdapat dengan tunggal homomorfisma grup $\varphi \otimes \psi : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ sedemikian sehingga $(\varphi \otimes \psi)(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \psi(n)$ untuk setiap $m \in M$ dan $n \in N$.
2) Jika $\lambda : M' \longrightarrow M''$ dan $\mu : N' \longrightarrow N''$ adalah R-modul homomorfisma, maka $(\lambda \otimes \mu) \circ (\varphi \otimes \psi) = (\lambda \circ \varphi) \otimes (\mu \circ \psi)$

3. Koaljabar

Definisi 3.1.

Misalkan R ring komutatif dengan satuan dan C adalah modul atas R. R-modul C disebut R-koaljabar jika terdapat R-pemetaan linear

$$\begin{aligned} \Delta : C &\longrightarrow C \otimes_R C \\ c &\mapsto \sum c_{\underline{1}} \otimes c_{\underline{2}} \end{aligned} \quad dan \quad \varepsilon : C \longrightarrow R$$

berturut-turut disebut *coproduct* dan *counit*, sedemikian hingga diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes_R C \arrow[d, "I_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "\Delta \otimes I_C"] & C \otimes_R C \otimes_R C \end{tikzcd} \quad dan \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "I_c"] & C \otimes_R C \arrow[d, "\varepsilon \otimes I_c"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "I_C \otimes \varepsilon"] & C \end{tikzcd}$$

Secara eksplisit dinyatakan dengan :

$$(I_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I_C) \circ \Delta \ dan \ (I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I_C = (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta$$

Definisi 3.2.

Diberikan R-koaljabar C dan C'. R-pemetaan linear $f : C \longrightarrow C'$ disebut koaljabar morfisma jika diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"'] & C' \arrow[d, "\Delta'"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "f \otimes f"] & C' \otimes_R C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Secara eksplisit dinyatakan dengan :

$$\Delta' \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta \qquad dan \qquad \varepsilon' \circ f = \varepsilon$$

4. Komodul

Sebelumnya, R dinotasikan sebagai ring komutatif dengan satuan, $\mathbf{M}_R$ adalah kategori R-modul, dan C, tepatnya (C, Δ, ε) adalah R-koaljabar.

Definisi 4.1.

Misalkan $M \in \mathbf{M}_R$. M disebut C-komodul kanan jika terdapat R-pemetaan linear

$$\begin{aligned} \partial^M &: M \to M \otimes_R C \\ & m \mapsto \sum m_{\underline{0}} \otimes m_{\underline{1}} \end{aligned}$$

(disebut coaction kanan dari C), sedemikian hingga diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial^M"] \arrow[d, "\lambda^M"'] & M \otimes_R C \arrow[d, "I_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes_R C \arrow[r, "\partial^M \otimes I_C"] & M \otimes_R C \otimes_R C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial^M"] \arrow[dr, "I_M"'] & M \otimes_R C \arrow[d, "I_M \otimes \varepsilon"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Secara eksplisit dinyatakan dengan :

$$\begin{aligned} (\partial^M \otimes I_C) \circ \partial^M &= (I_M \otimes \Delta) \circ \partial^M \\ (I_M \otimes \varepsilon) \circ \partial^M &= I_M \end{aligned}$$

Coaction ∂^M yang memenuhi sifat komutatif dari diagram diatas disebut koassosiatif dan mempunyai kounit. Untuk setiap $m \in M$, *coaction* ∂^M dikatakan koassosiatif dan mempunyai kounit jika

$$\sum \partial^M (m_{\underline{0}}) \otimes m_{\underline{1}} = \sum m_{\underline{0}} \otimes \Delta(m_{\underline{1}}) \ \text{ dan } \ m = \sum m_{\underline{0}} \varepsilon(m_{\underline{1}})$$

Definisi 4.2.

Misalkan M dan N adalah C-komodul kanan. $f : M \longrightarrow N$ disebut morfisma komodul (C-morfisma) jika dan hanya jika diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial^M"'] & N \arrow[d, "\partial^N"] \\ M \otimes_R C \arrow[r, "f \otimes I_C"] & N \otimes_R C \end{tikzcd}$$

Atau secara eksplisit dinyatakan dengan :

$$\partial^M \circ f = (f \otimes I_C) \circ \partial^M$$

dan untuk setiap $m \in M$:

$$\partial^M(f(m)) = \sum f(m)_{\underline{0}} \otimes f(m)_{\underline{1}} = (f \otimes I_C)(\partial^M(m)) = \sum f(m_{\underline{0}}) \otimes m_{\underline{1}}$$

Himpunan kelas-kelas *C*-komodul kanan bersama-sama dengan himpunan *C*-morfisma membentuk kategori komodul yang dinotasikan dengan $\mathbf{M}^C$.

Definisi 4.3.

Misalkan $M \in \mathbf{M}_R$. M disebut *C*-komodul kiri jika terdapat *R*-pemetaan linear

$$\begin{aligned} {}^M\partial : M &\to C \otimes_R M \\ m &\mapsto \sum m_{\underline{-1}} \otimes m_{\underline{0}} \end{aligned}$$

disebut *coaction* kiri dari *C* ke *M* (*C*-coaction kiri), sedemikian sehingga diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "{}^M\partial"] \arrow[d, "{}^M\partial"'] & C \otimes_R M \arrow[d, "\Delta \otimes I_M"] \\ C \otimes_R M \arrow[r, "I_C \otimes {}^M\partial"] & C \otimes_R C \otimes_R M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "{}^M\partial"] \arrow[dr, "I_M"'] & C \otimes_R M \arrow[d, "\varepsilon \otimes I_M"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Secara eksplisit dinyatakan dengan :

$$\begin{aligned} &(I_C \otimes {}^M\partial) \circ {}^M\partial = (\Delta \otimes I_M) \circ {}^M\partial \\ &(\varepsilon \otimes I_M) \circ {}^M\partial = I_M \end{aligned}$$

Coaction ${}^M\partial$ dikatakan koassosiatif dan mempunyai kounit jika

$$\sum m_{\underline{-1}} \otimes {}^M\partial(m_{\underline{0}}) = \sum \Delta(m_{\underline{-1}}) \otimes m_{\underline{0}} = \sum m_{\underline{-2}} \otimes m_{\underline{-1}} \otimes m_{\underline{0}} \quad \text{dan} \quad m = \sum \varepsilon(m_{\underline{-1}}) m_{\underline{0}}$$

C-morfisma diantara *C*-komodul kiri *M*, dan *N* didefinisikan secara simetris dengan *C*-morfisma dari *C*-komodul kanan. Himpunan kelas-kelas *C*-komodul kiri bersama-sama dengan himpunan *C*-morfisma membentuk kategori komodul yang dinotasikan dengan ${}^C\mathbf{M}$.

5. Relasi Hom-tensor Dalam Kategori Komodul

Misalkan $M \in \mathbf{M}^C$ dan X adalah R-modul. Hasil kali tensor $X \otimes_R M$ adalah C-komodul kanan dengan coaction

$$I_X \otimes \partial^M : X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R M \otimes_R C$$

Lebih khusus, $X \otimes_R C$ adalah C-komodul kanan dengan coaction

$$I_X \otimes \Delta : X \otimes_R C \longrightarrow X \otimes_R C \otimes_R C .$$

Relasi Hom-tensor dalam $\mathbf{M}^C$ diperlihatkan dalam teorema berikut .

Teorema 5.1.

Misalkan X adalah R-modul.

1) Untuk setiap $M \in \mathbf{M}^C$, R-pemetaan linear

$$\varphi : Hom^C(M, X \otimes_R C) \longrightarrow Hom_R(M, X), \quad f \mapsto (I_X \otimes \varepsilon) \circ f ,$$

adalah bijektif, dengan pemetaan invers $h \mapsto (h \otimes I_C) \circ \partial^M$.

2) Untuk setiap $M, N \in \mathbf{M}^C$, R-pemetaan linear

$$\psi : Hom^C(X \otimes_R M, N) \longrightarrow Hom_R(X, Hom^C(M, N)), \quad g \mapsto [x \mapsto g(x \otimes -)],$$

adalah bijektif, dengan pemetaan invers $h \mapsto [x \otimes m \mapsto h(x)(m)]$.

Bukti :

(1) Untuk setiap $f \in Hom^C(M, X \otimes_R C)$ diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial^M"'] & X \otimes_R C \arrow[d, "I_X \otimes \Delta"'] \arrow[dr, "="] & \\
M \otimes_R C \arrow[r, "f \otimes I_C"'] & X \otimes_R C \otimes_R C \arrow[r, "I_X \otimes \varepsilon \otimes I_C"'] & X \otimes_R C
\end{tikzcd}$$

yaitu

$$f = (I_X \otimes \varepsilon \otimes I_C) \circ (f \otimes I_C) \circ \partial^M = ((I_X \otimes \varepsilon) \circ f \otimes I_C) \circ \partial^M = (\varphi(f) \otimes I_C) \circ \partial^M$$

Hal ini mengakibatkan φ injektif.

Karena ∂^M adalah C-morfisma, maka $(h \otimes I_C) \circ \partial^M$ juga C-morfisma untuk setiap $h \in Hom_R(M, X)$. Oleh karena itu

$$\varphi((h \otimes I_C) \circ \partial^M) = (I_X \otimes \varepsilon) \circ (h \otimes I_C) \circ \partial^M = h \circ (I_M \otimes \varepsilon) \circ \partial^M = h ,$$

maka φ surjektif.

(2) Relasi Hom-tensor untuk modul terdapat suatu isomorfisma *R*-modul,

$$\psi : Hom_R(X \otimes_R M, N) \longrightarrow Hom_R(X, Hom_R(M, N)) \qquad (*)$$

Untuk setiap $x \in X$, diagram berikut komutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{x\otimes -} & X \otimes_R M \\ \downarrow{\scriptstyle \partial^M} & & \downarrow{\scriptstyle I_X \otimes \partial^M} \\ M \otimes_R C & \xrightarrow{(x\otimes -)\otimes I_C} & X \otimes_R M \otimes_R C \end{array}$$

yaitu

$$((I_X \otimes \partial^M) \circ (x \otimes -))(m) = (I_X \otimes \partial^M)((x \otimes -)(m)) = (I_X \otimes \partial^M)(x \otimes m) = x \otimes \partial^M(m)$$

dan

$$((x \otimes -) \otimes I_C \circ \partial^M)(m) = (x \otimes -) \otimes I_C(\partial^M(m)) = ((x \otimes -) \otimes I_C)(\sum m_{\underline{0}} \otimes m_{\underline{1}})$$

$$= \sum (x \otimes -)(m_{\underline{0}}) \otimes I_C(m_{\underline{1}}) = \sum (x \otimes m_{\underline{0}}) \otimes m_{\underline{1}}$$

$$= x \otimes (\sum m_{\underline{0}} \otimes m_{\underline{1}}) = x \otimes \partial^M(m)$$

Jadi $x \otimes -$ adalah *C*-morfisma. Oleh karena itu, untuk setiap $g \in Hom^C(X \otimes_R M, N)$, komposisi $g \circ (x \otimes -)$ adalah *C*-morfisma. Di lain pihak, untuk setiap $h \in Hom_R(X, Hom^C(M, N))$ diagram berikut komutatif,

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_R M & \longrightarrow & N \\ \downarrow{\scriptstyle I_X \otimes \partial^M} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^N} \\ X \otimes_R M \otimes_R C & \longrightarrow & N \otimes_R C \end{array}$$

yaitu,

$$((h \otimes I_C) \circ (I_X \otimes \partial^M))(x \otimes m) = (h \circ I_X) \otimes (I_C \otimes \partial^M)(x \otimes m) = (h(x) \otimes I_C) \circ \partial^M(m)$$

dan

$$(\partial^N \circ h)(x \otimes m)(m) = \partial^N(h(x)(m)) = (\partial^N \circ h(x))(m) = (h(x) \otimes I_C) \circ \partial^M(m)$$

sebab

$$h(x) \in Hom^C(M, N).$$

Ini menunjukkan bahwa $\psi^{-1}(h)$ berada dalam $Hom^C(X \otimes_R M, N)$ dan oleh karena itu ψ dalam (*) membatasi pemetaan bijektif $\psi : Hom^C(X \otimes_R M, N) \longrightarrow Hom_R(X, Hom^C(M, N))$ adalah diperlukan. □

Serupa dengan $\mathbf{M}^C$, relasi Hom-tensor dalam $M \in {}^C\mathbf{M}$ diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 5.2.

Misalkan X adalah R-modul.

1) Untuk setiap $M \in {}^C\mathbf{M}$,terdapat isomorfisma

$$\varphi' : {}^C Hom(M, C \otimes_R X) \longrightarrow Hom_R(M, X), \quad f \mapsto (\varepsilon \otimes I_X) \circ f,$$

dengan pemetaan invers $h \mapsto (I_C \otimes h) \circ {}^M\partial$.

2) Untuk setiap $M, N \in {}^C\mathbf{M}$, terdapat isomorfisma

$$\psi' : {}^C Hom(M \otimes_R X, N) \longrightarrow Hom_R(X, {}^C Hom(M, N)), \quad g \mapsto [x \mapsto g(- \otimes x)],$$

dengan pemetaan invers $h \mapsto [m \otimes x \mapsto h(x)(m)]$.

6. Kesimpulan

Seperti halnya pada kategori modul, hubungan yang istimewa antara Hom dan hasil kali tensor juga terdapat dalam kategori komodul, dan relasi ini merupakan relasi yang serupa dengan relasi Hom-tensor dalam kategori modul.

Daftar Pustaka

[1] Adkins, W.A. dan Weintraub(1992). *Algebra: An Approach via Module Theory*. Springer-Verlag.

[2] Brzezinski, T. dan Wisbauer, R. (2003). *Corings and Comodules*.

[3] MacLane, S. dan Birkhoff, G. (1979). *Algebra*. Macmillan Publishing. Co, Inc.

[4] Rotman, J.J. (1979), *An Introduction to Homological Algebra*, Akademic Press.