Jurnal Matematika Vol. 16, No. 2, November 2017
ISSN: 1412-5056 / 2598-8980
http://ejournal.unisba.ac.id/

Diterima: 28/07/2017
Disetujui: 23/11/2017
Publikasi Online: 28/11/2017

ALTERNATIIF LAIN MENENTUKAN PANJANG GARIS SINGGUNG DI LUAR PARABOLA

Ade Novia Rahma[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
[2,3]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau, Pekanbaru

ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id, mashadi.mat@gmail.com, gemawati.sri@gmail.com

Abstrak. Panjang garis singgung melalui suatu titik di luar parabola dapat ditentukan dengan satu alternatif yaitu dengan jarak antara dua titik. Penulis menemukan alternatif lain menentukan panjang garis singgung melalui suatu titik di luar parabola dengan menggunakan konsep garis kutub.

Kata kunci: panjang garis singgung, persamaan garis kutub, parabola.

Abstract. (*alternative way in determining the length of tangent outside the parabola*) The length of tangent which pass through a certain point outside the parabola can be using the distance between two points. In this study, the finding revealed another alternative for deciding the length of tangent trough one point outside the parabola by using the concept of the poles.

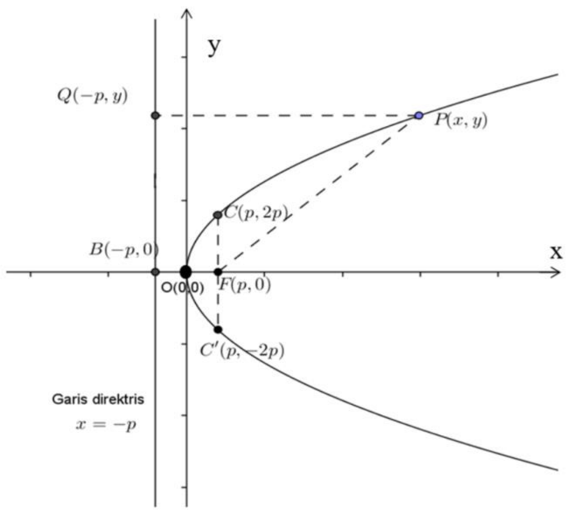
Keywords: equality of the poles, the length of tangent, parabola

1. Pendahuluan

Geometri merupakan salah satu cabang dari matematika. Geometri berasal dari bahasa yunani yaitu *geo* yang artinya bumi dan *metre* yang artinya mengukur. Geometri adalah cabang matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Thales (624-547 SM) yang berkenaan dengan relasi ruang [4].

Aldersmenyatakan bahwa geometri adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari tentang titik, garis, bidang dan benda-benda ruang beserta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya, dan hubungannya antara yang satu dengan yang lain [1].Wirodikromo menjelaskan salah satu topik yang dipelajari dalam geometri adalah tentang irisan kerucut. Irisan kerucut dapat menghasilkan beberapa potongan bidang seperti lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola. Sangat banyak yang dapat dibahas dari irisan kerucut khususnya parabola[6].

Dari beberapa definisi geometri di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa geometri adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari mulai dari bentuk dimensi satu sampai dimensi tiga yang berupa titik dan garis, bidang dan bangun ruang yang mengkaji tentang sifat bentuk dan lainnnya. Secara umum ruang lingkup geometri adalah mengenai lingkaran, garis, dan sudut, bangun-bangun datar seperti segitiga dan segiempat, bangun-bangun ruang seperti kubus, balok, prisma, dan bola, kesimetrian, kesebangunan, kekongruenan, geometri analitis, dan sebagainya.



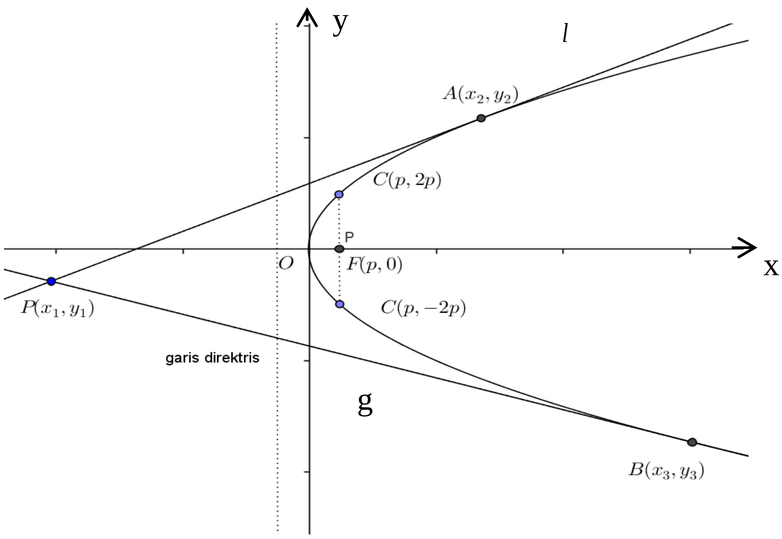
Gambar 1. Parabola puncak $O(0,0)$ dengan fokus $F(p,0)$

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu. Titik tertentu itu disebut titik api (fokus) dan garis tertentu itu disebut direktris [3]. Gambar 1 menunjukkan Parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan fokus $F(p,0)$ akan memiliki sumbu simetri berimpit dengan sumbu *x*, titik fokus di $F(p,0)$ dengan persamaan direktris $x=-p$.

Misalkan titik $p(x,y)$ adalah sembarang titik pada parabola. Berdasarkan definisi parabola, maka berlaku Jarak $PF =$ Jarak PQ sehingga diperoleh persamaan parabola :

$$y^2 = 4px \tag{1}$$

Pada Gambar 2. misalkan titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lengkungan parabola dengan persamaan (1). Jika ditarik garis singgung dari titik $P(x_1, y_1)$ ke parabola maka diperoleh koordinat titik singgung $A(x_2, y_2)$ dan koordinat titik singgung $B(x_3, y_3)$.



Gambar 2. Parabola dengan koordinat titik singgung $A(x_2, y_2)$ dan koordinat titik singgung $B(x_3, y_3)$.

Penentuan panjang $|\overline{PA}|$ dan $|\overline{PB}|$ biasanya menggunakan jarak antara dua titik. Pada tulisan ini akan digunakan alternatif lain yaitu dengan konsep garis kutub. Penelitian ini lanjutan dari penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh Sri Wahyuningsih (2014) tentang alternative menentukan persamaan garis singgung parabola dan hiperbola [7].

2. Konsep Garis Kutub

Diketahui parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan titik A dan B terletak pada parabola dan titik P berada di luar parabola, dapat ditarik garis AB. Berdasarkan Gambar 2 maka persamaan garis yang menyinggung parabola di titik $A(x_2, y_2)$ adalah

$$y_2 y = 2p(x + x_2) \tag{2}$$

Karena titik $P(x_1, y_1)$ berada pada garis yang menyinggung parabola di titik $A(x_2, y_2)$, maka persamaan (2) menjadi

$$y_2 y_1 = 2p(x_1 + x_2) \tag{3}$$

$$y_1 y_2 - 2px_2 = 2px_1 \tag{4}$$

Selanjutnya, persamaan garis yang menyinggung parabola di titik $B(x_3, y_3)$ adalah

$$y_3 y = 2p(x + x_3)\,. \tag{5}$$

Karena titik $P(x_1, y_1)$ berada pada garis yang menyinggung parabola di titik $B(x_3, y_3)$, maka persamaan (5) menjadi

$$y_3 y_1 = 2p(x_1 + x_3)\,. \tag{6}$$

kurangkan persamaan (3) dan (6) diperoleh

$$\begin{gathered} y_2 y_1 - y_3 y_1 = 2p(x_2 - x_3) \\ y_1(y_2 - y_3) = 2p(x_2 - x_3) \\ \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{2p}{y_1} \end{gathered}$$

jadi $\frac{2p}{y_1}$ merupakan gradien garis dari titik $A(x_2, y_2)$ ke titik $B(x_3, y_3)$, Sehingga diperoleh persamaan garis yang melalui titik $A(x_2, y_2)$ dan titik $B(x_3, y_3)$ yaitu

$$\begin{gathered} y - y_2 = \frac{2p}{y_1}(x - x_2) \\ y_1(y - y_2) = 2p(x - x_2) \\ y_1 y = 2px + y_1 y_2 - 2px_2 \end{gathered} \tag{7}$$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (7) diperoleh

$$\begin{gathered} y_1 y = 2px + 2px_1 \\ y_1 y = 2p(x + x_1)\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Persamaan (8) merupakan persamaan garis dari titik $A(x_2, y_2)$ ke titik $B(x_3, y_3)$ atau persamaan garis kutub dari titik $P(x_1, y_1)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada tulisan ini ditentukan panjang garis singgung dari suatu titik di luar parabola. Panjang garis singgung di sini merupakan jarak antara sebarang titik di luar parabola ke garis singgung pada parabola, dalam menentukan panjang garis singgung dari suatu titik di luar parabola dapat ditentukan dengan garis kutub.

Misalkan pada Gambar 2. titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lengkungan parabola dengan persamaan (1). Jika ditarik garis singgung dari titik $P(x_1, y_1)$ ke parabola maka diperoleh koordinat titik singgung $A(x_2, y_2)$ dan koordinat titik singgung $B(x_3, y_3)$. Akan ditentukan panjang $\overline{PA}$ dan $\overline{PB}$ dengan menggunakan persamaan garis kutub dari titik $P(x_1, y_1)$ yaitu

$$A\left(\frac{-2px_1 + y_1^2 + y_1\sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2p}, y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4px_1}\right)$$

dan

$$B\left(\frac{-2px_1 + y_1^2 - y_1\sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2p}, y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4px_1}\right)$$

Sehingga dapat ditentukan panjang garis singgung titik $P(x_1, y_1)$ terhadap parabola yaitu sebagai berikut:

$$\left|\overline{PA}\right|^2 = \left(\frac{-2px + y_1^{\,2} + y_1\sqrt{y_1^{\,2} - 4px_1}}{2p} - x_1\right)^2 + \left(y_1 + \sqrt{y_1^{\,2} - 4px_1} - y_1\right)^2 \qquad (9)$$

Misal $C = y_1^{\,2} - 4px_1$, maka persamaan (9) menjadi

$$\left|\overline{PA}\right|^2 = \left(\frac{C + y_1\sqrt{C}}{2p}\right)^2 + C$$

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{\left(\frac{C + y_1\sqrt{C}}{2p}\right)^2 + C} \qquad (10)$$

dan

$$\left|\overline{PB}\right|^2 = \left(\frac{-2px + y_1^{\,2} - y_1\sqrt{y_1^{\,2} - 4px_1}}{2p} - x_1\right)^2 + \left(y_1 - \sqrt{y_1^{\,2} - 4px_1} - y_1\right)^2$$

$$\left|\overline{PB}\right|^2 = \left(\frac{y_1^{\,2} - 4px_1 - y_1\sqrt{y_1^{\,2} - 4px_1}}{2p}\right)^2 + y_1^{\,2} - 4px_1 \qquad (11)$$

Misal $C = y_1^{\,2} - 4px_1$, maka persamaan (11) menjadi

$$\left|\overline{PB}\right|^2 = \left(\frac{C - y_1\sqrt{C}}{2p}\right)^2 + C$$

$$\left|\overline{PB}\right| = \sqrt{\left(\frac{C - y_1\sqrt{C}}{2p}\right)^2 + C} \qquad (12)$$

Persamaan (10) dan (12) merupakan panjang garis singgung dari titik $P(x_1, y_1)$ yang berada di luar lengkungan parabola $y^2 = 4px.$

Contoh 1. Titik $P(-3,-5)$ terletak di luar parabola $y^2 = 8x$. Tentukan panjang garis singgung yang melalui titik $P(-3,-5)$.[2]

Solusi: Diketahui persamaan parabola $y^2 = 8x$, karena persamaan umum parabola adalah $y^2 = 4px$ berarti $p = 2$, untuk menentukan panjang garis singgung melalui titik $p(-3,-5)$ terhadap parabola $y^2 = 8x$, seperti pada Gambar 5 digunakan persamaan (11) dan (13) dan diperoleh

$$\begin{aligned} C &= y_1^2 - 4px_1 \\ &= (-5)^2 - 4(2)(-3) \\ &= 25 + 24 = 49 \end{aligned}$$

Sehingga

$$|PA|^2 = \left(\frac{C + y_1\sqrt{C}}{2p}\right)^2 + C = \left(\frac{49 + (-5)\left(\sqrt{49}\right)}{2(2)}\right)^2 + 49 = \left(\frac{49 - 35}{4}\right)^2 + 49 = 61{,}25$$

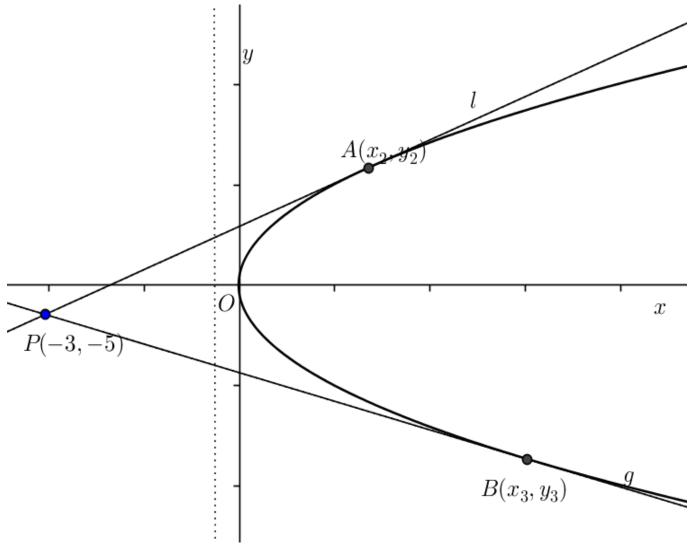
$$|PA| = \sqrt{61{,}25} = 7{,}8$$

dan

$$|PB|^2 = \left(\frac{C - y_1\sqrt{C}}{2p}\right)^2 + C = \left(\frac{49 + 5\left(\sqrt{49}\right)}{2(2)}\right)^2 + 49 = \left(\frac{49 + 35}{4}\right)^2 + 49 = 490$$

$$|PB| = 22{,}13$$

Jadi, panjang $|PA|$ adalah 7,8 dan panjang $|PB|$ adalah 22,13



Gambar 5. Parabola dengan panjang PA dan PB

Contoh 2 Titik $P(-3,-5)$ terletak di luar parabola $y^2 = 8x$. Tentukan panjang titik singgung yang melalui titik $P(-3,-5)$.

Solusi: Diketahui persamaan parabola $y^2 = 8x$, dimana persamaan umum parabola adalah $y^2 = 4px$. Sehingga diperoleh $4px = 8x$ atau $p = 2 > 0$. Jadi, parabola terbuka ke kanan. Untuk menentukan panjang PA dan PB, bisa juga diperoleh dengan menggunakan jarak antara dua titik. Misalkan $A(x_2, y_2)$ dan $B(x_3, y_3)$ merupakan koordinat titik singgung sehingga diperoleh koordinat titik singgung nya sebagai berikut

$$x_2 = \frac{-2px_1 + y_1^2 + y_1\sqrt{y_1^2 - 4px_1})}{2p}$$

$$= \frac{-2(2)(-3) + (-5)^2 + (-5)\sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1}{2}.$$

$$y_2 = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4px_1} = (-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3))} = 2.$$

Jadi koordinat titik A adalah $A(\frac{1}{2}, 2)$

$$x_3 = \frac{-2px_1 + y_1^2 - y_1\sqrt{y_1^2 - 4px_1})}{2p}$$

$$= \frac{-2(2)(-3) + (-5)^2 - (-5)\sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = 18.$$

$$y_2 = y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4px_1} = (-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3))} = -12$$

dan koordinat titik B adalah $B(18, -12)$

Sehingga diperoleh koordinat titik singgung A dan B

$$A(\frac{1}{2}, 2) \text{ dan } B(18, -12)$$

Untuk menentukan panjang PA dan PB dapat ditentukan dengan jarak antara dua titik yaitu

$$|PA| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2+5)^2 + (\frac{1}{2} + 3)^2} = \sqrt{61{,}25} = 7{,}8$$

dan

$$|PB| = \sqrt{(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-12+5)^2 + (18+3)^2} = \sqrt{490} = 22{,}13$$

Jadi, panjang $|PA|$ adalah 7,8 dan panjang $|PB|$ adalah 22,13.

4. Kesimpulan

Panjang garis singgung dari titik $P(x_1, y_1)$ ke titik $A(x_2, y_2)$ dan panjang garis singgung dari titik $P(x_1, y_1)$ ke titik $B(x_3, x_3)$ dengan garis kutub dapat ditentukan dengan persamaan (11) dan persamaan (13). Adapun saran yang dapat dilakukan untuk perbaikan dan kelanjutan tulisan ini adalah menemukan alternatif lain untuk menentukan panjang garis singgung serta menentukan panjang garis singgung yang ditarik dari titik diluar parabola yang dirotasi 45^0.

Referensi

[1] C. J. Alders (1961).“*Ilmu Ukur Ruang”*, Noor Komala, Jakarta, 1961.

[2] M. Kanginan dan T. Kustendi (2000).“*Matematika 3A untuk SMU Kelas III”*, Penerbit Grafindo, Jakarta.

[3] Mashadi (2012).*Buku Ajar Geometri*, Pusbangdik UNRI, Pekanbaru, 2012.

[4] S. Lang (1988).“*Geometry, Second Edition*”, Springer-Verlag, USA.

[5] S. Saragih (2011).“*Geometri Analitik Bidang dan Ruang”*, Pusbangdik UNRI, Pekanbaru.

[6] S. Wirodikromo (2007).“*Matematika SMA 3 IPA”*, Erlangga, Jakarta.

[7] Sri Wahyuningsih (2014).“*Alternatif menentukan persamaan garis singgung parabola dan hiperbola”*, Tesis Magister Universitas Riau.