Jurnal Matematika Vol.7 No.1
November 2007 [49 : 54]

PEMBUKTIAN TENTANG KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL MELALUI FAKTA UKURAN LEBESGUE DI RUANG MORREY

Gani Gunawan

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
Jalan Tamansari 1 Bandung, 40116, Indonesia

e-mail: ggan06@yahoo.com

Abstrak. Dalam makalah ini akan diperlihatkan suatu pembuktian mengenai operator integral fraksional di ruang Morrey melalui ukuran Lebesgue $\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)$. Meskipun gagasan pembuktiannya hampir sama dengan pembuktian yang dilakukan *Chiarenza-Frasca,* namun dalam menaksir $I_2(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}^n$, akan digunakan fakta ukuran Lebesgue $\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)$, persisnya melalui fakta

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy \leq CR^{-\gamma}$$, untuk setiap $\gamma > 0$.

Kata kunci: Ukuran Lebesgue, operator integral fraksional, ruang Morrey

1. Pendahuluan

Ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ pertama kali diperkenalkan oleh C.B. Morrey pada tahun 1938, lihat [9]. Selanjutnya ruang Morrey banyak ditemukan pada saat mempelajari perilaku operator Schrodinger dan teori potensial. Dalam makalah ini akan ditunjukkan suatu pembuktian tentang keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey melalui fakta ukuran Lebesgue. Dalam [10], dinyatakan bahwa bahwa operator I_α juga terbatas di ruang Morrey, yakni terbatas dari $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ asalkan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ dan $0 \leq \lambda < n - \alpha p$. Adapun ruang Morrey itu sendiri didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan secara lokal pada $\mathbb{R}^n$, yaitu seperti yang dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 1

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq n$, ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan oleh

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \| f \|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \right\}$$

dengan

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B=B(x,R)} \left(\frac{1}{R^\lambda} \int_B \left| f(y) \right|^p dy \right)^{1/p}.$$

Dalam hal ini notasi $B = B(x,R)$ merupakan bola buka berdimensi n dengan pusat $x \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari $R > 0$, yaitu

$$B(x,R) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < R \right\}.$$

Untuk setiap bola $B = B(x,R)$ berdimensi n ini dipunyai suatu fakta bahwa

$$|B| \le CR^n \qquad \text{(i)}$$

dimana n adalah suatu bilangan dimensi yang tetap dan C adalah konstanta yang tidak bergantung pada x dan R, dengan $|B|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari B, lihat [2], halaman 247.

Untuk ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathrm{P}^n)$ ini, dapat dinyatakan bahwa jika $\lambda = 0$, maka diperoleh $L^{p,0}(\mathrm{P}^n) = L^p(\mathrm{P}^n)$. Ini berarti akan diperoleh kembali keterbatasan operator I_α dari $L^p(\mathrm{P}^n)$ ke $L^q(\mathrm{P})$. Sedangkan jika $\lambda = n$, maka diperoleh $L^{p,\lambda}(\mathrm{P}^n) = L^\infty(\mathrm{P}^n)$. Dalam hal $\lambda = n$ ini, keterbatasan operator I_α dari $L^p(\mathrm{P}^n)$ ke $L^q(\mathrm{P}^n)$ menjadi tidak berlaku, seperti yang ditunjukan dalam [10] halaman 119. Oleh karena itu, dalam pembahasan bagian ini kita pandang $0 < \lambda < n$. Dari fakta yang disebut pada (i) dapat dinyatakan suatu lemma berikut.

Lemma 2

Untuk setiap $\alpha > 0$

$$\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \le CR^\alpha$$

untuk suatu konstanta real C.

Bukti

Jika $n \le \alpha$, maka jelas bahwa menurut fakta (i)

$$\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = |B| \le CR^\alpha .$$

Sekarang jika $n < \alpha$, maka

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &\le \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}R \le |x-y| < 2^{-j}R} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{-j-1}R\right)^{n-\alpha}} \left|B\left(x, 2^{-j}R\right)\right| \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{(j+1)(n-\alpha)}}{R^{n-\alpha}} C\left(2^{-j}R\right)^n \\
&= C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} R^\alpha \\
&= C\, R^\alpha
\end{aligned}$$

untuk suatu konstanta real C. □

Lemma 3

Untuk setiap $\gamma > 0$

$$\int_{¡^n \backslash B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} dy \le CR^{-\gamma} .$$

Bukti

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy \le \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j R \le |x-y| < 2^{j+1} R} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left|B\left(x, 2^{j+1} R\right)\right|}{\left(2^j R\right)^{n+\gamma}}$$

$$\le C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1} R\right)^n}{\left(2^j R\right)^{n+\gamma}}$$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma j} R^{-\gamma}$$

$$= CR^{-\gamma}.$$

Jadi

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy \le CR^{-\gamma}$$

untuk suatu konstanta real C. $\square$

2. Pembuktian Melalui Fakta Ukuran Lebesgue

Keterbatasan operator I_α di ruang Morrey, yaitu terbatas dari $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, dapat diperlihatakan dengan memperhatikan *ketaksamaan Fefferman-Stein* seperti dinyatakan dalam teorema 4, yang buktinya dapat dilihat pada [1], halaman 53.

Teorema 4 (*Fefferman-Stein*)
Misalkan ω adalah fungsi tak negatif dan f adalah fungsi terintegralkan secara lokal di $\mathbb{R}^n$. Maka terdapat $C_p > 0$ sedemikian sehingga

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|Mf(x)\right|^p \omega(x)\, dx \le C_p \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\right|^p M\omega(x)\, dx.$$

Berdasarkan ketaksamaan Fefferman-Stein ini diperoleh fakta bahwa operator maksimal juga terbatas di ruang Morrey, seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 5 (*Chiarenza-Frasca*)

Misal $1 < p < \infty$ dan $0 < \lambda < n$. Maka

$$\|Mf\|_{L^{p,\lambda}} \le C \|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

untuk suatu konstanta C yang tidak bergantung pada f.

Bukti

Dengan menggunakan ketaksamaan yang dinyatakan dalam teorema 4, kita mempunyai

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|Mf(x)\right|^p \chi(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\right|^p \left(M\chi(x)\right) dx \qquad \text{(ii)}$$

untuk suatu fungsi f dan χ yang tak negatif.

Ambil $f \in L^{p,\lambda}$ dan χ adalah fungsi karakteristik pada bola $B_R = B(x_0,R)$. Maka menurut ketaksamaan (ii) di atas diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \left|Mf(x)\right|^p dx &\le C\left\{\int_{B_{2R}} |f(x)|^p \left(M\chi(x)\right)dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}R}\setminus B_{2^k R}} |f(x)|^p \left(M\chi(x)\right)dx\right\} \\
&\le C\left\{\int_{B_{2R}} |f(x)|^p\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}R}\setminus B_{2^k R}} |f(x)|^p \frac{R^n}{\left(|x-x_0|-R\right)^n}\, dx\right\} \\
&\le C\left\{\int_{B_{2R}} |f(x)|^p\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^n}{\left(2^{k-1}R\right)^n} \int_{B_{2^{k+1}R}} |f(x)|^p\, dx\right\} \\
&\le C\|f\|^p_{L^{p',\lambda}} \left\{(2R)^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{k-1}R\right)^n}\left(2^{k+1}R\right)^\lambda\right\} \subseteq C\, \|f\|^p_{L^{p,\lambda}}\, R^\lambda .
\end{aligned}$$

Jadi didapat

$$\frac{1}{R^{\lambda/p}}\left(\int_{B_R} \left|Mf(x)\right|^p\right)^{1/p} \le C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

untuk suatu konstanta C. □

Berdasarkan pada fakta keterbatasan fungsi maksimal Mf di $L^{p,\lambda}$ (P^n), maka dapat dibuktikan suatu teorema keterbatasan operator integral fraksional I_α dari $L^{p,\lambda}$ (P^n) ke $L^{q,\lambda}$ (P^n) asalkan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$, seperti yang dinyatakan dalam teorema 6 berikut,

Teorema 6 (*Chiarenza-Frasca*)

Misalkan $0 < \alpha < n$, $1 < p < {n}/{\alpha}$ dan $0 < \lambda < n - \alpha p$. Maka terdapat $C_{p,q} > 0$ sedemikian sehingga

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\lambda}} \le C_{p,q}\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

dengan

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}.$$

Gagasan pembuktian teorema 6 ini dapat dilihat di [1]. Dalam uraian pembuktiannya, Chiarenza–Frasca menuliskan integral fractional I_α, $0 < \alpha < n$, untuk setiap $f \in L^{p,\lambda}$ dan $f \neq 0$, menjadi

$$I_\alpha f(x) = I_1(x) + I_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

di mana $I_1(x) := \int_{|x-y|<R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$ dan $I_2(x) := \int_{|x-y|\geq R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$ dengan $R > 0$ untuk masing-masing $I_1(x)$ dan $I_2(x)$. Namun pembuktian yang akan ditunjukkan di sini sedikit berbeda dengan pembuktian yang dilakukan oleh *Chiarenza-Frasca*, khususnya dalam menaksir $I_2(x)$. Dalam hal ini, kita akan menggunakan fakta ukuran Lebesgue untuk menaksir $I_2(x)$ dalam proses pembuktiannya. Dalam menaksir $I_2(x)$ dilakukan dengan menggunakan lemma 3. Selanjutnya pembuktian dilakukan dengan cara yang sama seperti yang dilakukan oleh *Chiarenza-Frasca*. Untuk lebih jelasnya, pembuktian teorema 6 ini dapat dituliskan sebagai berikut.

Bukti

Gagasan pembuktian dari teorema 6 ini sama halnya dengan yang dilakukan Chiarenza-Frasca, namun untuk menaksir $I_2(x)$ dilakukan sebagai berikut, yakni

$$|I_2(x)| \leq \int_{|x-y|\geq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy .$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Holder diperoleh

$$\int_{|x-y|\geq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \leq \left(\int_{|x-y|\geq R} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x-y|\geq R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\, R^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \left(\int_{|x-y|\geq R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Perhatikan bahwa $(n - \alpha)q = n + \gamma$, dengan $\gamma = n(q - 1) - \alpha q$. Oleh karenanya

$$\frac{\gamma}{q} = n\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \alpha = \frac{n}{p} - \alpha > 0 .$$

Dengan menggunakan Lemma 3, diperoleh

$$C R^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \left(\int_{|x-y|\geq R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq C R^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}\, R^{\frac{-\gamma}{q}}$$

$$= C R^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}\, R^{-\left(\frac{n}{p} - \alpha\right)}$$

$$= C R^{\left(\alpha + \frac{\lambda - n}{p}\right)} \|f\|_{p,\lambda} .$$

Jadi

$$\int_{|x-y|\geq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \leq C\, R^{\left(\alpha+\frac{\lambda-n}{p}\right)} \|f\|_{p,\lambda} \ ,$$

untuk suatu konstanta C.

Langkah pembuktian selanjutnya dilakukan dengan cara yang serupa seperti yang dibuktikan dalam uraian pembuktian Chiarenza-Frasca. □

3. Kesimpulan

Pembuktian melalui fakta ukuran Lebesgue ini, selain merupakan cara lain dalam membuktikan keterbatasan operator integral fraksional, juga merupakan fakta baru dalam pembuktian teorema Chiarenza-Frasca, sekaligus menguatkan argumentasi tentang keterbatasan operator integral fraksional di ruang perumumannya, khususnya di ruang Morrey, yaitu terbatas dari ruang $L^{p,\lambda}(P^n)$ ke $L^{q,\lambda}(P^n)$ dengan $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n-\lambda}$ dan $0 \leq \lambda < n-\alpha p$.

Kepustakaan

[1] E. Nakai, *Recent topics of fractional integrals*, Departemen of Mathematics, Osaka Kyoiku University Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan.

[2] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princenton University Press, Princenton, N.J, 1970.

[3] E.M. Stein, *Harmonic Analysis*: *real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals,* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1993.

[4]. F. Chiarenza and M.Frasca, *Morrey spaces and Hardy Littlewood maximal function*, rend. Mat. **7**, 273-279, 1987.

[5]. G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992.

[6]. G. Gunwan and H. Gunawan, *Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey*, Jurnal Limits, Jurusan Matematika Institut Teknologi Surabaya, 2007.

[7]. J.G. Cuerva and A.E. Gatto, *Boundedness properties of fractional integral operators associated to non doubling measures*, Mathematics Subject Classification, DePaul University, Spain, 1991.

[8]. M. Loss and H. Elliot, *Analysis*, Graduate student in mathematics, volume 4, 2001

[9]. R. Fefferman, *Maximal functions in analysis*, The University of Chicago REU, 2005.