Jurnal Matematika Vol.7 No.1
November 2007 [1 : 8]

BARISAN MODUL EKSAK DAN BARISAN HOMOMORFISMA MODUL EKSAK

Yanita

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas Padang

e-mail: yanita4sri@yahoo.com

Abstract. This article explained sequence exact of R-module and R-module homomorphism and their relation. Module is generalized of vector space V over field F. If M module over ring R, usually denoted M R-module. Module sequence is defined as homomorphism sequence from module to another module. R-Module sequence have exact property at a module, for example M_i, if kernel function from M_i to M_{i+1} same with image function from M_{i-1} to M_i. The set of all R-module homomorphisms from M_i to M_{i+1} will be denoted $Hom_R(M_i,M_{i+1})$. $Hom_R(M_i,M_{i+1})$ is also module over ring which the same with M_i and M_{i+1}.

Keyword: sequence exact of R-module

1. Pendahuluan

Modul adalah generalisasi dari ruang vektor atas lapangan F, yaitu dengan mengeneralisasi lapangan F dengan ring R. Dengan generalisasi ini tidak semua sifat-sifat yang ada pada ruang vektor dipunyai oleh modul. Salah satunya adalah tidak semua modul mempunyai basis. Misalkan M modul atas ring R, biasanya ditulis dengan M R-modul. Sebagaimana diketahui bahwa lapangan F adalah ruang vektor atas dirinya sendiri, demikian juga halnya dengan R adalah modul atas dirinya sendiri.

Homomorfisma modul adalah suatu fungsi yang mengaitkan dua buah modul atas ring yang sama (tidak mesti berbeda modulnya) yang definisinya dapat dianalogkan dengan definisi transformasi linier (fungsi linier) pada ruang vektor. Himpunan semua homomorfisma dari suatu modul M ke modul N (atas ring R yang sama) ditulis sebagai $Hom_R(M,N)$. $Hom_R(M,N)$ ini juga merupakan modul atas ring yang sama dengan M dan N.

Pada teori modul dikenal adanya barisan modul. Barisan modul didefinisikan sebagai barisan fungsi dari suatu modul ke modul lain, yaitu terkait dengan beberapa fungsi dan beberapa modul.

$$\cdots M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \cdots$$

Barisan ini merupakan contoh barisan modul dengan M_{i-1}, M_i dan M_{i+1} adalah modul atas ring R dan f_i dan f_{i+1} adalah homomorfisma modul.

Ada beberapa sifat yang dapat dibahas pada barisan modul ini, terkait dengan sifat fungsinya (dalam hal ini sifat image, kernel, fungsi injektif, surjektif dan bijektifnya). Pada tulisan ini penulis membahas sifat-sifat barisan modul terkait dengan sifat fungsi tersebut.

2. Metodologi

Tulisan ini bersifat kajian pustaka, sehingga metode yang digunakan adalah studi literatur. Adapun tahap-tahap yang dilakukan penulis untuk membahas barisan modul ini adalah sebagai berikut:

Tahap 1 : Pada tahap ini penulis mendeskripsikan tentang modul dan homomorfisma modul. Kemudian membahas beberapa sifat yang akan digunakan pada sifat barisan modul.

Tahap 2 : Pada tahap ini penulis mendeskripsikan tentang barisan modul

Tahap 3 : Pada tahap ini penulis membahas sifat-sifat barisan modul, yaitu barisan untuk modul itu sendiri, kemudian barisan untuk himpunan homomorfisma modulnya.

Tahap 4 : Pada tahap ini penulis akan memberikan kesimpulan, berupa hubungan antara barisan modul dan barisan homomorfisma modulnya.

3. Pembahasan

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian Metodologi, maka pada tahap awal ini akan diberikan beberapa teori yang berkaitan dengan modul dan homomorfisma.

Definisi 3.1

Misalkan R sebarang ring dengan unsur satuan (tidak mesti komutatif).
Group abelian M disebut modul (kiri) atas R, jika untuk setiap m,n di M dan untuk setiap r, s di R berlaku:

a. $r(m+n) = rm + rn$
b. $(r + s)m = rm + sm$
c. $(rs)m = r(sm)$
d. ‘1’$(m) = m$, ‘1’ *adalah unsur satuan di R.*

Jika *M* modul atas *R*, biasanya ditulis dengan *M R*-modul atau disebut saja *M* modul atas *R*.

Definisi 3.2

Misalkan R ring dengan unsur satuan dan M, N adalah R-modul. Suatu fungsi $f: M \to N$ disebut homomorfisma R-modul jika:

a. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ *untuk setiap* m_1, m_2 *di M dan*
b. $f(am) = af(m)$ *untuk setiap a di R dan untuk setiap m di M.*

Oleh karena homomorfisma ini adalah sebuah fungsi maka semua istilah yang ada pada fungsi juga berlaku pada homomorfisma, yaitu image (*Im*), kernel (*Ker*), injektif dan surjektif. Istilah-istilah ini akan digunakan saat membahas barisan modul dan barisan homomorfisma modul. Kemudian sifat-sifat yang terkait dengan istilah-istilah tersebut juga akan digunakan.

Himpunan semua homomorfisma dari *M* ke *N R*-modul ditulis dengan $Hom_R(M,N)$. Dalam kasus $M = N$ biasanya ditulis dengan $End_R(M)$ dari pada $Hom_R(M,M)$. Unsur dari $End_R(M)$ disebut endomorfisma. Jika *f* unsur di $End_R(M)$ invertibel, maka *f* disebut automorfisma dari *M*. Dari definisi modul maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa $Hom_R(M,N)$ adalah *R*-modul.

Teorema 3.3 (Teorema Isomorfisma Modul I)

Misalkan M dan N modul atas ring R yang sama dan $f: M \to N$ adalah homomorfisma R-modul. Maka $M/Ker(f) \cong Im(f)$.

Definisi 3.4

Misalkan R ring. Suatu barisan R-modul dan R-modul homomorfisma modul:

$$\cdots M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots$$

Dikatakan eksak di M_i jika $Im(f_i)=Ker(f_{i+1})$. Barisan ini dikatakan eksak jika barisan ini eksak di setiap M_i. Kasus khusus dari Definisi 3.3 akan disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 3.5

a. $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ *eksak jika dan hanya jika f injektif.*

b. $M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ *eksak jika dan hanya jika g surjektif.*

c. $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ *eksak jika dan hanya jika f injektif, g surjektif dan Im(f) = Ker(g).*

Bukti:

a. Misalkan barisan modul dan homomorfisma modul $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ eksak (di M_1), berarti diperoleh $Im(0) = Ker(f)$. Ini berarti bahwa $Ker(f\ ) = \{0\}$. Dengan kata lain terbukti f injektif. Sebaliknya misalkan barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ dengan f injektif, berarti berdasarkan sifatnya diperoleh $Ker(f) = \{0\}$. Ini juga memberikan hasil bahwa $Im(0) = \{0\} = Ker(f)$. Dengan kata lain barisan ini eksak (di M_1).

b. Misalkan barisan modul dan homomorfisma modul $M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ eksak (di M_2) berarti $Im(g) = Ker(0)$. Dari sini diperoleh $Im(g) = M_2$. Dengan kata lain terbukti g surjektif. Sebaliknya misalkan barisan $M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ dengan g surjektif. Ini berarti $Im(g) = M_2$. Karena M_2 dibawa semua ke 0, maka $Ker(0) = M_2$. Dengan kata lain terbukti barisan ini eksak di M_2.

c. Jelas dari (1) dan (2).■

Akibat 3.6

a. Jika barisan $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ eksak maka $g \circ f = 0$

b. Jika barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ eksak maka *coKer(f) = M/Im(f)* $\cong$ M_2 *(coKer(f) = M/Im(f) = M/Ker(g) = coIm(g)* $\cong$ M_2 *)*

Bukti:

a. Misalkan barisan $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ eksak berarti $Im(f) = Ker(g)$. Ambil sebarang $m \in M_1$ berarti $f(m) \in Im(f)$. Karena $Im(f) = Ker(g)$, diperoleh$f(m) \in Ker(g)$, artinya $g(f(m)) = 0_{M_2}$. Dengan kata lain terbukti $g \circ f = 0$.

b. Misalkan barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ eksak berarti f injektif, g surjektif dan $Im(f) = Ker(g)$. Dengan menggunakan Teorema Isomorfisma Modul I maka diperoleh $M_2 \cong M/Im(f)$. Karena $Im(f) = Ker(g)$ maka $M_2 \cong M/Ker(g)$. ■

Catatan: suatu barisan eksak dengan bentuk $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ disebut barisan eksak pendek.

Contoh 3.7

Barisan $0 \to Z \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Z_m \to 0$ dengan $f(a) = ma$ untuk setiap $a \in Z$ dan $g(a) = \bar{k}$ untuk setiap $a \in Z$; $\bar{0} \le \bar{k} < \overline{m-1}$; $a \bmod m = \bar{k}$.
Barisan ini adalah barisan eksak.

Bukti:

Cukup jelas bahwa f dan g adalah homomorfisma R-modul. Menurut Teorema 3.5 untuk membuktikan barisan ini barisan eksak cukup ditunjukkan f injektif, g surjektif dan $Im(f) = Ker(g)$.

a. Akan ditunjukkan f injektif. Dengan sifat fungsi cukup dibuktikan $Ker(f) = \{0\}$. Ambil sebarang $x \in Ker(f)$. Diperoleh $f(x) = 0 = mx$. Dengan kata lain diperoleh $x = 0$. Atau terbukti $Ker(f) = \{0\}$.

b. Akan ditunjukkan g surjektif. Dengan sifat fungsi dibuktikan $Im(g) = Z_m$. $Im(g) = \{g(z) \ / \ z \in Z\} = \{\bar{k} \mid \bar{0} \le \bar{k} < \overline{m-1};\ \bar{k} = z \bmod m\} = Z_m$.

c. Akan ditunjukkan $Im(f) = Ker(g)$. Perhatikan bahwa $Im(f) = \{f(a) | a \in Z\} = \{ma | a \in Z\} = \{g(a) = \bar{0} | a \in Z\} = Ker(g)$. ■

Pembahasan dilanjutkan dengan mengkontruksikan himpunan semua homomorfisma dari suatu modul ke modul lain (atas ring R yang sama). Perhatikan barisan R-modul dan homomorfisma R-modul berikut: misalkan M_1, M_2, M_3 dan N adalah R-modul dan f, g, h adalah homomorfisma R-modul.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h \circ f"'] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M_3 \\ & N & \end{tikzcd}$$

Jika $f \in Hom_R(M_1, M_2)$ maka untuk setiap $h \in Hom_R(M_2, N)$ terdapat $p \in Hom_R(M_1, N)$ sehingga $p = h \circ f$. Jadi dapat didefinisikan: $f^*: Hom_R(M_2, N) \to Hom_R(M_1, N)$ dengan $f^*(h) = h \circ f$ untuk setiap $h \in Hom_R(M_2, N)$. Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa f^* adalah homomorfisma R-modul. Kemudian perhatikan barisan berikut:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "f \circ k"] & & \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[r, "g"] & M_3 \end{tikzcd}$$

Jika $f \in Hom_R(M_1, M_2)$ maka untuk setiap $f \in Hom_R(P, M_1)$ terdapat $q \in Hom_R(P, M_2)$ sehingga $q = f \circ k$. Jadi dapat didefinisikan: $f_*: Hom_R(P, M_1) \to Hom_R(P, M_2)$ dengan $f_*(k) = f \circ k$ untuk setiap $k \in Hom_R(P, M_1)$. Dengan mudah dapat dibuktikan f_* adalah homomorfisma R-modul.

Kemudian secara umum dibuat barisan sebagai berikut:

a.
$$\begin{tikzcd} Hom_R(M_3,-) \arrow[r, "f^*"] \arrow[rr, bend right, "f^* \circ g^*"'] & Hom_R(M_2,-) \arrow[r, "g^*"] & Hom_R(M_1,-) \end{tikzcd}$$

b.
$$\begin{tikzcd} Hom_R(-,M_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "f_* \circ g_*"'] & Hom_R(-,M_2) \arrow[r, "g_*"] & Hom_R(-,M_3) \end{tikzcd}$$

Dari dua barisan di atas kemudian dikemukakan teorema berikut, sekaligus sebagai kesimpulan hubungan barisan modul dan barisan homomorfisma modul.

Teorema 3.8

a. Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\gamma} M_2$ barisan eksak jika dan hanya jika barisan $0 \to Hom_R(N,M_1) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_R(N,M) \xrightarrow{\gamma_*} Hom_R(N,M_2)$ barisan eksak $\mathcal{Z}$-*modul* untuk semua *N R-modul*.

b. Barisan $M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\gamma} M_2 \to 0$ barisan eksak jika dan hanya jika barisan $0 \to Hom_R(M_2,N) \xrightarrow{\gamma^*} Hom_R(M,N) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(M_1,N)$ barisan eksak $\mathcal{Z}$-*modul* untuk semua *N R-modul*.

Bukti:

1. Untuk membuktikan (a), diberikan ilustrasi sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "0 \circ f"] & N \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\varphi \circ g"] & N \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\gamma \circ h"] & \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\gamma"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Kemudian didefinisikan:

1) $Hom_R(N,0) = 0 \xrightarrow{\mathbf{0}} Hom_R(N,M_1)$

Dengan $\mathbf{0}(f) = 0 \circ f$ untuk setiap $f \in Hom_R(N,0)$.

2) $Hom_R(N,M_1) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_R(N,M)$

Dengan $\varphi_*(g) = \varphi \circ g$ untuk setiap $g \in Hom_R(N,M_1)$.

3) $Hom_R(N,M) \xrightarrow{\gamma_*} Hom_R(N,M_2)$

Dengan $\gamma_*(h) = \gamma \circ h$ untuk setiap $h \in Hom_R(N,M)$.

Selanjutnya dibentuk barisan:

$$0 \xrightarrow{\mathbf{0}} Hom_R(N,M_1) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_R(N,M) \xrightarrow{\gamma_*} Hom_R(N,M_2) \ldots(*)$$

Diketahui bahwa $0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\gamma} M_2$ barisan eksak, berarti eksak di M_1 dan di M, jadi berlaku :

1) φ injektif
2) $Ker(\gamma) = Im(\varphi)$

Akan dibuktikan barisan (*) eksak, yaitu:

1) Ambil sebarang $g \in Hom_R(N,M_1)$ dan $\varphi_*(g) = \varphi \circ g = \mathbf{0}$. Ambil sebarang $n \in N$, $(\varphi \circ g)(n) = \varphi(g(n)) = 0$. Karena φ injektif, berarti $g(n) = 0$. Dengan kata lain terbukti φ_* injektif.
2) Ambil sebarang $h \in Im(\varphi_*)$, berarti terdapat $g \in Hom_R(N,M_1)$ sehingga $\varphi_*(g) = \varphi \circ g = h$. Karena $\gamma \circ \varphi = \mathbf{0}$, diperoleh $\gamma \circ \varphi \circ g = \gamma \circ h$, atau $0_{Hom_R(N,M_2)} = \mathbf{0}(g) = \gamma_*(h)$. Artinya $h \in Ker(\gamma_*)$, jadi diperoleh $Im(\varphi_*) \subseteq Ker(\gamma_*)$. Kemudian ambil sebarang $h \in Ker(\gamma_*)$, berarti $\gamma_*(h) = 0_{Hom_R(N,M_2)}$ dengan $h \in Hom_R(N,M)$. Dengan demikian terdapat $g \in Hom_R(N,M_1)$ sehingga $\varphi_*(g) = h$, artinya $h \in Im(\varphi_*)$. Jadi diperoleh $Ker(\gamma_*) \subseteq Im(\varphi_*)$. Dengan kata lain terbukti $Ker(\gamma_*) = Im(\varphi_*)$.

Kemudian diketahui barisan (*) eksak, yaitu eksak di $Hom_R(N,M_1)$ dan di $Hom_R(N,M)$, dan berlaku:

1) φ_* injektif
2) $Ker(\gamma_*) = Im(\varphi_*)$

Akan dibuktikan barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\gamma} M_2$ eksak, yaitu:

1) Misalkan $N = Ker(\varphi)$ dan $g: N \to M_1$. Diketahui φ_* injektif, berarti jika $\varphi_*(g) = 0$ maka $g = \mathbf{0}$. Dari sini diperoleh $N = \{0\}$, atau terbukti φ injektif.
2) Misalkan $N = M_1$, sehingga diperoleh $0 = (\gamma_* \circ \varphi_*)(1_{M_1}) = \gamma \circ \varphi$. Kemudian ambil sebarang $w \in Im(\varphi)$ berarti terdapat $m_1 \in M_1$ sehingga $\varphi(m_1) = w$. Karena $\gamma \circ \varphi = \mathbf{0}$, diperoleh $\gamma(\varphi(m_1)) = 0$ atau $\varphi(m_1) \in Ker(\varphi)$. Jadi terbukti $Im(\varphi) \subseteq Ker(\varphi)$. Selanjutnya misalkan $N = Ker(\gamma)$ dan $h: N \to M$. Karena

barisan *) eksak berarti $h = \varphi_*(g)$ untuk suatu $g \in Hom_R(N, M_1)$. Dengan demikian $Im(\varphi) \supseteq Im(h) = N = Ker(\gamma)$. Jadi terbukti $Im(\varphi) = Ker(\gamma)$. ■

2. Untuk membuktikan (b), diberikan ilustrasi sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "k \circ \varphi"'] & M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "l \circ \gamma"'] & M_2 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, "m \circ 0"'] & 0 \arrow[d, "m"] \\
 & N & N & N
\end{tikzcd}$$

Kemudian didefinisikan:

a. $\mathbf{0}: Hom_R(0, N) \longrightarrow Hom_R(M_2, N)$

Dengan $\mathbf{0}(m) = m \circ 0$ untuk setiap $m \in Hom_R(0, N)$.

b. $\gamma^* : Hom_R(M_2, N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$

Dengan $\gamma^*(l) = l \circ \gamma$ untuk setiap $l \in Hom_R(M_2, N)$.

c. $\varphi^* : Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M_1, N)$

Dengan $\varphi^*(k) = k \circ \varphi$ untuk setiap k$\in Hom_R(M, N)$.

Selanjutnya dibentuk barisan:

$$0 \xrightarrow{\mathbf{0}} Hom_R(M_2, N) \xrightarrow{\gamma^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(M_1, N) \ldots (^{**})$$

Diketahui $M_1 \overset{\varphi}{\to} M \overset{\gamma}{\to} M_2 \to 0$ barisan eksak, berarti eksak di M dan M_2, jadi berlaku :

1) γ surjektif
2) $Ker(\gamma) = Im(\varphi)$

Akan dibuktikan barisan (**) eksak, yaitu: eksak di $Hom_R(M_2, N)$ dan di $Hom_R(M, N)$.

1) Ambil sebarang $l \in Ker(\gamma^*)$ artinya $\gamma^*(l) = \mathbf{0}_{Hom_R(M,N)}$ dengan $l \in Hom_R(M_2, N)$. Berdasarkan definisinya diperoleh $l \circ \gamma = \mathbf{0}$. Akan ditunjukkan $l = \mathbf{0}$. Ambil sebarang $m_2 \in M_2$, karena $Im(\gamma) = M_2$, berarti $m_2 = \gamma(m)$ untuk suatu $m \in M$. Akibatnya $l(m_2) = l(\gamma(m)) = (l \circ \gamma)(m) = \mathbf{0}(m) = 0_N$ atau $l = \mathbf{0} \in Hom_R(M_2, N)$. Dengan kata lain terbukti γ^* injektif.
2) Ambil sebarang $k \in Im(\gamma^*)$, berarti terdapat $l \in Hom_R(M_2, N)$ sehingga $\gamma^*(l) = l \circ \gamma = k$. Karena $Ker(\gamma) = Im(\varphi)$ berarti $\gamma \circ \varphi = \mathbf{0}$, sehingga $l \circ \gamma \circ \varphi = k \circ \varphi$ atau $\varphi^*(k) = \mathbf{0}_{Hom_R(M_1,N)}$. Jadi diperoleh $k \in Ker(\varphi^*)$, atau terbukti $Im(\gamma^*) \subseteq Ker(\varphi^*)$. Selanjutnya misalkan $k_1 \in Ker(\varphi^*)$. Berarti

$\varphi^*(k_1) = \mathbf{0}_{Hom_R(M_1,N)}$ dan $k_1 \in Hom_R(M,N)$. Karena $Im(\gamma) = M_2$ berarti dapat didefinisikan $l_1 : M_2 \to N$ dengan $l_1(m_2) = k_1(m),\ m \in M$. Jadi diperoleh $l_1(m_2) = l_1(\gamma(m)) = (l_1 \circ \gamma)(m) = k_1(m)$ atau $\gamma^*(l_1) = k_1$. Dengan kata lain terbukti $Ker(\varphi^*) \subseteq Im(\gamma^*)$. Jadi $Im(\gamma^*) = Ker(\varphi^*)$.

Kemudian diketahui barisan (**) eksak akan ditunjukkan barisan $M_1 \overset{\varphi}{\to} M \overset{\gamma}{\to} M_2 \to 0$ eksak, yaitu:

1) Misalkan $N = M_2$. Karena γ^* injektif dan $Im(\gamma^*) = Ker(\varphi^*)$ diperoleh $\varphi^* \circ \gamma^* = \mathbf{0}$. Karena fungsi $i : M_2 \to M_2$ berada di $Hom_R(M_2, M_2)$ maka $(\varphi^* \circ \gamma^*)(i) = \mathbf{0}(i)$ atau $\varphi^*(\gamma^*(i)) = \varphi^*(i \circ \gamma) = (i \circ \gamma) \circ \varphi = i \circ (\gamma \circ \varphi) = 0$. Dari sini diperoleh $\gamma \circ \varphi = \mathbf{0}$ atau $Im(\varphi) = Ker(\gamma)$.
2) Karena $Ker(\varphi^*) = Im(0)$ maka $\gamma^*(0) = 0$. $(\mathbf{0} \circ \gamma)(m) = \mathbf{0}(\gamma(m)) = 0$ dipenuhi untuk setiap $m \in M$. Jadi $\gamma(M) = M_2$ atau terbukti γ surjektif. ■

Daftar Pustaka

[1] Adkins, W. A. and Weintraub, S. H., (1992). *Algebra Approach via Module Theory*, Springer – Verlag, New York.

[2] Hungerford, T. W., (1974). *Algebra*, Springer – Verlag, New York.

[3] Lang, S., (1993). *Álgebra*, Addison – Wesley Publishing Company, USA.