Jurnal Matematika Vol.7 No.1
November 2007 [71 : 76]

LOKALISASI RING NONKOMUTATIF ATAS HIMPUNAN BAGIAN MULTIPLIKATIFNYA

Icih Sukarsih

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
Jalan Tamansari 1 Bandung, 40116, Indonesia

e-mail: sukarsh@yahoo.com

Abstrak. Dalam aljabar komutatif, dari setiap ring komutatif R dan himpunan multiplikatif S dengan $1 \in S, 0 \notin S$, dan S tidak memuat pembagi nol, selalu dapat dibentuk ring komutatif dengan elemen satuan R_S dan homomorfisma $\varepsilon : R \to R_S$ sehingga untuk setiap $s \in S$ $\varepsilon(S)$ adalah unit dalam R_S, yang disebut lokalisasi R atas S. Untuk ring non komutatif, pembentukan ring yang demikian tidak selalu dapat dilakukan. Syarat perlu dan cukup supaya dari ring non-komutatif dapat dilakukan lokalisasi seperti diatas adalah S harus bersifat *permutable* dan *reversible*

Kata kunci: ring, lokalisasi, himpunan multiplikatif.

1. Pendahuluan

Konsep tentang lokalisasi merupakan konsep yang sangat penting dalam mempelajari teori ring. Konsep ini merupakan generalisasi dari pembentukan lapangan bilangan rasional Q dari daerah integral bilangan bulat Z dan $Z \subseteq Q$. Generalisasi dari hal di atas adalah dari sebarang daerah integral dapat dibentuk lapangan yang memuat daerah integral tersebut dimana pembentukannya mengikuti pembentukan lapangan bilangan rasional dari daerah integral bilangan bulat. Lapangan tersebut disebut sebagai lapangan hasil bagi (*Quotien field*).

Generalisasi ini ternyata masih dapat diperluas, dimana untuk sebarang ring komutatif dengan elemen satuan dapat dibentuk struktur aljabar seperti di atas. Akan tetapi, struktur aljabar yang terbentuk bukanlah merupakan lapangan melainkan ring komutatif dengan elemen satuan. Untuk setiap ring komutatif R dan himpunan bagian S dari R yang memenuhi $st \in S$ untuk setiap $s, t \in S$, $0 \notin S$ dan S tidak memuat pembagi nol, dapat dibentuk ring hasil bagi R_S yang disebut lokalisasi dari R atas S. Pertanyaannya adalah, apakah untuk sebarang ring non-komutatif, lokalisasi seperti di atas dapat dilakukan?. Ternyata tidak demikian, dalam ring non-komutatif, lokalisasi tidak selalu dapat dilakukan, diperlukan syarat tambahan pada himpunan multiplikatifnya sehingga dapat dibentuk ring hasil bagi kiri atau kanan. Berikut ini akan dibahas syarat perlu dan cukup agar dari suatu ring non-komutatif dapat dibentuk ring hasil bagi.

2. Lokalisasi

Definisi 2.1.

Jika R ring komutatif, himpunan bagian S dari R disebut tertutup secara muktiplikatif jika untuk setiap $s, t \in S$ maka $st \in S$.

Definisi 2.2.

Misalkan *R* ring komutatif dan misalkan $0 \notin S$ adalah himpunan bagian dari *R* yang tertutup secara multiplikatif dan tidak memuat pembagi nol. Lokalisasi dari *R* atas *S* adalah ring komutatif R_S dengan satuan, dan suatu homomorfisma ring $\varepsilon : R \longrightarrow R_S$, sehingga untuk setiap $s \in S$, $\varepsilon(s)$ adalah unit di R_S.

Teorema 2.3.

(1) Setiap elemen dalam R_S mempunyai bentuk $\varepsilon(r)\varepsilon(s)^{-1}$ dimana $r \in R$ dan $s \in S$.

(2) $\ker(\varepsilon) = \{r \in R : rs = 0 \textit{ untuk suatu } s \in S\}$

3. Lokalisasi Ore

Dalam aljabar non-komutatif, dari suatu ring non-komutatif *R* dan himpunan multiplikatif $S \subseteq R$ yang memenuhi $st \in S$ untuk setiap $s, t \in S$, $1 \in S$, dan $0 \notin S$, diperlukan syarat tambahan pada *S* untuk menghasilkan ring hasil bagi kiri (kanan). Definisi berikut mengikuti bentuk ring hasil bagi dari ring komutatif *R* atas *S*.

Definisi 3.1.

Ring hasil bagi kiri atau lokalisasi kiri dari ring non-komutatif *R* terhadap himpunan multiplikatif $S \subseteq R$, dinotasikan dengan $S^{-1}R$ dan homomorfisma $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ sedemikian hingga

(1) $\varphi(s)$ adalah invertible dalam $S^{-1}R$ untuk setiap $s \in S$

(2) Setiap elemen dalam $S^{-1}R$ mempunyai bentuk $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ untuk suatu $s \in S$ dan $a \in R$

(3) $ker(\varphi) = \{r \in R | \exists s \in S, sr = 0\}$

Ring hasil bagi kanan atau lokalisasi kanan didefinisikan secara similar. Ring hasil bagi kiri $S^{-1}R$ tidak selalu ada, jika $S^{-1}R$ ada dapat disimpulkan dua syarat perlu pada *S* yang ditemukan oleh Ore sebagai berikut.

Teorema 3.2.

Jika terdapat lokalisasi kiri dari *R* terhadap himpunan multiplikatif $S \subseteq R$, maka

(1) $Sa \cap Rs \neq 0$ untuk setiap $s \in S$ dan $a \in R$

(2) Jika $s \in S$ *dan* $a \in R$ sedemikian hingga $as = 0$, maka terdapat $t \in S$ sedemikian hingga $ta = 0$

Bukti :

Jika $S^{-1}R$ ada, maka $\varphi(a), \varphi(s)^{-1} \in S^{-1}R$, sehingga $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} \in S^{-1}R$. Berdasarkan Definisi 3.1 (2) $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} \in S^{-1}R$ harus mempunyai bentuk $\varphi(t)^{-1}\varphi(b)$ untuk suatu $t \in S$ dan $b \in R$. Dengan demikian, $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(t)^{-1}\varphi(b)$, sehingga $\varphi(t)\varphi(a) = \varphi(b)\varphi(s)$, maka $\varphi(ta - bs) = 0$. Jadi $ta - bs \in ker(\varphi)$, maka berdasarkan Definisi 3.1(3) terdapat $u \in S$ sedemikian hingga $u(ta - bs) = 0$, atau $uta = ubs$ dengan $ut \in S$ dan $ub \in R$. Selanjutnya misalkan $as = 0$ untuk setiap $a \in R$ dan $s \in S$, maka $\varphi(a)\varphi(s) = 0$.

Karena $\varphi(s)$ invertable, maka $\varphi(a)=0$ dalam $S^{-1}R$. Jadi $a \in ker(\varphi)$, maka terdapat $t \in S$ sedemikian hingga $ta = 0$.

Definisi 3.3.

Himpunan multiplikatif $S \subseteq R$ yang memenuhi kondisi *(1)* pada Teorema *3.2* disebut permutable kiri atau himpunan Ore kiri. Sedangkan himpunan multiplikatif $S \subseteq R$ yang memenuhi kondisi *(2)* pada Teorema *3.2* disebut reversible kiri.

Definisi 3.4.

Jika himpunan multiplikatif $S \subseteq R$ adalah himpunan *Ore* kiri dan reversible kiri, maka *S* disebut himpunan denominator kiri.

Teorema 3.5.

Ring non-komutatif *R* mempunyai ring hasil bagi kiri terhadap himpunan multiplikatif *S* jika dan hanya jika *S* himpunan denominator kiri.

Bukti :

Jika *R* mempunyai ring hasil bagi kiri terhadap himpunan multiplikatif *S*, maka berdasarkan Teorema 3.2, *S* adalah himpunan Ore kiri dan reversible kiri. Jadi *S* himpunan denominator kiri. Sebaliknya, misalkan *S* himpunan denominator kiri, akan dibentuk ring hasil bagi $S^{-1}R$.

Misalkan didefinisikan relasi ~ pada $S \times R$ dengan

$$(s,a) \sim (s',a')$$

jika dan hanya jika terdapat $b,b' \in R$ sedemikian hingga

$$bs = b's' \in S \quad \text{dan} \quad ba = b'a' \in R.$$

Akan dibuktikan relasi ~ merupakan relasi ekivalensi. Sifat refleksif dan simetri dapat dengan mudah dibuktikan. Berikut hanya akan dibuktikan sifat transitif. Misalkan $(s,a) \sim (s',a')$ dan $(s',a') \sim (s'',a'')$. Jadi terdapat $c,c' \in R$ dengan $cs' = c's'' \in S$ dan $ca' = c'a'' \in R$. Karena *S* himpunan Ore kiri, maka $S(cs') \cap R(b's') \neq 0$. Jadi terdapat $r \in R$ dan $t \in S$ sedemikian hingga $rb's' = tcs' \in S$, maka $(rb' - tc)s' = 0$. Karena *S* reversible kiri, maka terdapat $t' \in S$ sedemikian hingga $t'(rb' - tc) = 0$ atau $t'rb' = t'tc$. Selanjutnya $rbs = rb's' = tcs' = tc's'' \in S$, maka $(t'rb)s = (t'tc')s'' \in S$ dan $(t'rb)a = t'rb'a' = t'tca' = (t'tc')a'' \in R$. Jadi

$$(s,a) \sim (s'',a'').$$

Karena "~" relasi ekivalensi pada $S \times R$, maka pada $S \times R$ terbentuk kelas–kelas ekivalensi dari (s,a). Kelas-kelas yang memuat (s,a) dinotasikan dengan $\frac{a}{s}$ atau $s^{-1}a$, dan himpunan semua kelas ekivalensi dinotasikan dengan $S^{-1}R$.

Untuk mendefinisikan operasi penjumlahan pada $S^{-1}R$, akan diselidiki untuk dua pecahan $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}$ dapat disamakan penyebutnya. Misalkan $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}R$ dimana $a_1, a_2 \in R$ dan

$s_1, s_2 \in S$, maka $Ss_1 \cap Rs_2 \neq 0$. Jadi terdapat $r \in R$ dan $s \in S$ sedemikian hingga $rs_2 = ss_1 \in S$. Dengan demikian, $\frac{a_1}{s_1} = \frac{sa_1}{ss_1}$ dan $\frac{a_2}{s_2} = \frac{ra_2}{rs_2}$, sehingga dapat didefinisikan :

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{sa_1 + ra_2}{t}$$

dimana $t = ss_1 = rs_2$.

Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan di atas *well defined*.
Misalkan $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_1'}{s_1'}$, dan $\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_2'}{s_2'} \in S^{-1}R$, maka terdapat $b, b' \in R$ sedemikian hingga $bs_1 = b's_1' \in S$ dan $ba_1 = b'a_1' \in R$, dan $c, c' \in R$ sedemikian hingga $cs_2 = c's_2' \in S$ dan $ca_2 = c'a_2' \in R$. Karena S himpunan ore kiri maka $Sbs_1 \cap Rcs_2 \neq 0$, sehingga terdapat $r \in R$ dan $s \in S$ sedemikian hingga $rcs_2 = sbs_1 \in S$. Karena $\frac{a_1}{s_1} = \frac{sba_1}{sbs_1}$ dan $\frac{a_2}{s_2} = \frac{rca_2}{rcs_2}$, maka

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{sba_1 + rca_2}{t},$$

dimana $t = sbs_1 = rcs_2 = sb's_1' = rc's_2'$

$$= \frac{sb'a_1' + rc'a_2'}{sb's_1'} = \frac{sb'a_1'}{sb's_1'} + \frac{rc'a_2'}{sb's_1'} = \frac{sb'a_1'}{sb's_1'} + \frac{rc'a_2'}{rc's_2'} = \frac{a_1'}{s_1'} + \frac{a_2'}{s_2'}.$$

Terhadap operasi penjumlahan di atas $S^{-1}R$ grup komutatif , dengan $\frac{0}{1} \in S^{-1}R$ adalah elemen netral dan $\frac{-a}{s} \in S^{-1}R$ adalah invers dari $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$.

Selanjutnya, untuk mendefinisikan operasi pergandaan pada $S^{-1}R$, misalkan $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}R$ dimana $a_1, a_2 \in R$ dan $s_1, s_2 \in S$, maka $Sa_2 \cap Rs_1 \neq 0$. Jadi terdapat $r \in R$ dan $s \in S$ sedemikian hingga $rs_1 = sa_2 \in S$. Dengan demikian, $\frac{a_1}{s_1} = \frac{ra_1}{rs_1}$ dan $\frac{a_2}{s_2} = \frac{sa_2}{ss_2}$, sehingga dapat didefinisikan

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{ra_1}{rs_1} \cdot \frac{sa_2}{ss_2} = \frac{ra_1}{rs_1} \cdot \frac{rs_1}{ss_2} = \frac{ra_1}{ss_2}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi pergandaan pada $S^{-1}R$ di atas *well defined*.
Misalkan $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_1'}{s_1'}$, dan $\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_2'}{s_2'} \in S^{-1}R$, maka terdapat $b, b' \in R$ sedemikian hingga $bs_1 = b's_1' \in S$ dan $ba_1 = b'a_1' \in R$, dan $c, c' \in R$ sedemikian hingga $cs_2 = c's_2' \in S$ dan $ca_2 = c'a_2' \in R$. Karena S himpunan ore kiri maka $Rcs_2 \cap Sba_1 \neq 0$, sehingga terdapat

$r \in R$ dan $s \in S$ sedemikian hingga $rcs_2 = sba_1 \in S$, maka $a_1 s_2^{-1} = (sb)^{-1} rc$. Demikian juga diperoleh $rc' s_2' = sb' a_1' \in S$, sehingga $a_1' (s_2')^{-1} = (sb')^{-1} rc'$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s_1}.\frac{a_2}{s_2} &= (s_1^{-1}a_1)(s_2^{-1}a_2) = s_1^{-1}(a_1 s_2^{-1})a_2 = s_1^{-1}(sb)^{-1} rca_2 = s_1^{-1}b^{-1}s^{-1}rca_2, \\ &= (bs_1)^{-1} s^{-1} rc' a_2' = (b' s_1')^{-1} s^{-1} rc' a_2' = (s_1')^{-1} (b')^{-1} s^{-1} rc' a_2' \\ &= (s_1')^{-1} (sb')^{-1} rc' a_2' = (s_{-1}')^{-1} a_1' (s_2')^{-1} a_2' \\ &= ((s_{-1}')^{-1} a_1')((s_2')^{-1} a_2') = \frac{a_1'}{s_1'}.\frac{a_2'}{s_2'}. \end{aligned}$$

Terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan di atas $S^{-1}R$ merupakan ring dengan elemen satuan $\frac{1}{1} \in S^{-1}R$.

Selanjutnya didefinisikan pemetaan

$$\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R \text{ dengan } \varphi(a) = \frac{a}{1},$$

maka untuk setiap $a, b \in R$

$$\varphi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ dan } \varphi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1}.\frac{b}{1} = \varphi(a)\varphi(b) \cdot$$

Jadi $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ merupakan homomorfisma ring.

Elemen $\frac{1}{s} \in S$ adalah invers dari $\varphi(s) = \frac{s}{1}$, sebab untuk setiap $s \in S$, $\frac{1}{s}\varphi(s) = \frac{1}{s}.\frac{s}{1} = \frac{1}{1}$. Jadi $\varphi(s)$ invertible.

Untuk setiap $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, $\frac{a}{s} = s^{-1}a = \frac{s^{-1}}{1}.\frac{a}{1} = \varphi(s)^{-1}\varphi(a) \cdot$

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) = \left\{a \in R : \varphi(a) = \frac{0}{1}\right\} = \left\{a \in R : \frac{a}{1} = \frac{0}{1}\right\} &= \{a \in R : (1,a) \sim (1,0)\} \\ &= \{a \in R : \exists s, s' \in R, s1 = s'1 \in S \text{ dan } sa = s'0 \in R\} \\ &= \{a \in R : \exists s, s' \in R, s = s' \in S \text{ dan } sa = 0 \in R\} \\ &= \{a \in R : \exists s \in S, sa = 0\}. \end{aligned}$$

Jadi $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ merupakan homomorfisma ring dan dipenuhi :

(1) $\varphi(s)$ adalah invertible dalam $S^{-1}R$ untuk setiap $s \in S$

(2) Setiap elemen dalam $S^{-1}R$ mempunyai bentuk $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ untuk suatu $s \in S$ dan $a \in R$

(3) $ker(\varphi) = \{r \in R \mid \exists s \in S, sr = 0\}$

Jadi $S^{-1}R$ merupakan ring hasil bagi kiri dari *R* terhadap himpunan multifikatif $S \subseteq R$.

4. Kesimpulan

Ring hasil bagi kiri atau lokalisasi kiri dari ring non-komutatif R terhadap himpunan multiplikatif $S \subseteq R$ yang memenuhi $st \in S$ untuk setiap $s, t \in S$,$1 \in S$, dan $0 \notin S$, didefinisikan mengikuti lokalisasi dari ring komutatif. Akan tetapi, lokalisasi Ore kiri tidak selalu ada. Jika lokalisasi Ore kiri dari ring non-komutatif R atas S ada, maka S bersifat *permutable* kiri atau himpunan Ore kiri, yaitu $Sa \cap Rs \neq 0$ untuk setiap $s \in S$ dan $a \in R$, dan S bersifat *reversible* kiri, yaitu jika $s \in S$ dan $a \in R$ sedemikian hingga $as = 0$, maka terdapat $t \in S$ sedemikian hingga $ta = 0$. Kedua sifat di atas merupakan syarat perlu dan cukup pada S sehingga dapat dibentuk ring hasil bagi kiri dari ring non-komutatif R atas S. Lebih lanjut, pembentukan ring hasil bagi kanan atau lokalisasi Ore kanan dapat didefinisikan secara similar.

Daftar Pustaka

[1] Adkins, W.A & S.H. Weintraub (1992), *Algegra : An Approach Via Module Theory*, Springer-Verlag.

[2] Dummit, D.S. (2002), *Abstract Algebra*, John Wiley & Sons.

[3] Lam, T.Y (1999), *Lectrures on Modules and Rings*, Springer-Verlag.