Jurnal Matematika Vol.7 No.1
November 2007 [77 : 84]

MODIFIKASI MODEL MATEMATIKA SPRINTER DALAM SUATU KOMPETISI DUNIA

Gani Gunawan

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
Jalan Tamansari 1 Bandung, 40116, Indonesia

e-mail: ggan06@yahoo.com

Abstrak. Diawali dengan pendahuluan yang melatarbelakangi tulisan ini, penulis mencoba untuk meninjau kembali suatu pemodelan matematika mengenai atlit lari jarak pendek (*sprinter*) yang pernah dikemukakan oleh *J.B. Keller*, yang mana di dalamnya terdapat berbagai asumsi-asumsi yang dibuat untuk keperluan tersebut. Dengan menggunakan beberapa asumsi-asumsi yang dikemukakan oleh Keller sebagai landasan teorinya, dan dengan mengambaikan hal-hal teknis yang sangat detail, selanjutnya penulis mencoba untuk membuat pemodifikasian model matematik Keller dengan asumsi yang dikembangkan. Selanjutnya hasil pemodelan yang diperoleh kita validasi dan kita bandingkan dengan hasil pemodelan Keller.

Kata kunci : model matematika Keller

1. Pendahuluan

Pada perkembangan rekor dunia atletik, khususnya dalam olah raga lari jarak pendek (100 m atau *sprint*), timbul suatu pertanyaan, apakah rekor-rekor dunia atlit lari jarak pendek ini akan mencapai batas waktu tertentu ataukah akan terus melahirkan sprinter-sprinter dengan rekor waktu yang lebih cepat lagi seiring dengan perkembangan teknologi. Dan bagaimanakah gaya sprinter itu berlari sedemikian sehingga dapat berlari begitu cepat dengan waktu tempuh yang sangat singkat, atau dengan kata lain bagaminakah gaya para sprinter itu dalam berlari sehingga dapat diberi julukan sebagai manusia-manusia yang super cepat. Pertanyaan-pertanyaan tersebut memotivasi para ahli matematika untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut dengan membuat suatu pemodelan matematika. Salah seorang pakar matematika yang pertama memodelkan masalah ini adalah *Joseph B. Keller*, lihat [1] dan [2]. Sebagai model matematika yang pertama membahas tentang hal ini, jurnal tersebut dapat dijadikan sebagai rujukan untuk dapat mengembangkan pemodelan matematika lain yang terkait dengan gaya berlari jarak pendek tersebut. Atas dasar inilah penulis mencoba untuk mengembangkan model matematika tersebut terutama dalam hal strategi gaya sprinter .

Dengan berdasar pada teori Keller, penulis mencoba untuk mengembangkan model matematika yang dibuat Keller ini dengan memodifikasi model tersebut terutama dalam hal strategi gaya si pelari untuk suatu kompetisi dan sekaligus mengembangkan model matematika yang ada untuk lintasan lari yang melingkar yang tidak dibahas pada pemodelan Keller. Selanjutnya model yang dihasilkan kita validasi dengan data rekor yang ada dan membandingkannya dengan hasil pemodelan dari *Keller*. Adapun data rekor yang digunakan adalah *data word record* terbaru untuk lintasan lari yang terbuka, yang didapat melalui internet, yang di dalamnya tercantum rekor terbaru, tempat, waktu terjadinya rekor terbaru, dan atlit pemecah rekor terbaru.

Guna menyederhanakan pemodelannya, penulis membatasi masalah hanya pada perlombaan lari di lapangan terbuka (seperti yang dikemukakan oleh Keller), mengabaikan hal-hal teknis yang sangat mendetail seperti waktu reaksi pada saat start, kecepatan angin, bahan dasar lintasan, bahan pakaian dan sepatu atlit.

2. Tinjauan Teori Keller

Dalam suatu tulisan di jurnal *Physic Today* yang berjudul *A theory of competitive running* karya Joseph B. Keller (lihat [1]), terdapat sebuah teori berlari untuk suatu kompetisi dalam cabang olah raga atletik lari jarak pendek yang cukup sederhana untuk dianalisis, namun cukup berkompeten untuk menentukan nilai-nilai parameter fisiologi dari data-data rekor dunia. Parameter fisiologi yang diperlukan adalah gaya maksimum yang dapat dicapai pelari, gaya yang menghambat pelari, tingkat energi yang ekivalen dengan nilai oksigen yang tersedia per unit massa saat seseorang tidak dalam keadaan berlari, dan jumlah energi awal yang tersimpan dalam tubuh pelari pada awal lomba. Dengan menghitung aspek-aspek di atas (melalui teori Keller), maka perkiraan '*style*' gaya seorang atlit lari jarak pendek dapat ditentukan guna memperoleh waktu tempuh yang sangat singkat seperti rekor waktu tempuh yang telah diperoleh oleh para atlit lari jarak pendek dalam suatu kompetisi dunia.

Diamati lebih lanjut, ternyata teori Keller dibuat dengan berdasar pada Hukum Newton II. Teori ini pada akhirnya menghasilkan suatu teori strategi optimal untuk perlombaan lari jarak pendek (*sprint*). Dalam pembahasannya Keller membuat beberapa pengasumsian yang selanjutnya disebut dengan teori Keller. Adapun asumsi-asumsi tersebut dinyatakan sebagai berikut:

1. Sebagian dari total gaya dorong per unit massa yang dihasilkan pelari digunakan untuk mengatasi gaya hambat internal dan eksternal per unit massa.
2. Gaya hambat per unit massa pelari berbanding lurus dengan kecepatan pelari, dan berbading terbalik dengan konstanta redaman.
3. Gaya per unit massa terbatas.
4. Lintasan lari tidak berbentuk kurva (melingkar).
5. Jumlah energi untuk beraktifitas per unit massa setara dengan jumlah oksigen yang diperlukan tubuh untuk menghasilkan energi.

2.1. Pemodelan Keller

Dalam pembahasannya, Keller menyatakan suatu fakta fisika tentang dinamika gerak seseorang berlari yang menempuh jarak tertentu. Dalam fakta ini keller mengemukan suatu fenomena fisika yang mengatakan bahwa jarak lomba dari seorang atlit lari dapat dinyatakan sebagai fungsi dari waktu, seperti yang ditulis dalam persamaan berikut:

$$D = \int_0^T v(t)\,dt \qquad (1)$$

Selantunya, kecepatan atlit sprinter dapat dinyatakan sebagai fungsi *v(t)* dengan asumsi-asumsi seperti yang dikemukakan Keller dapat dirumuskan menjadi:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = f(t) \qquad (2)$$

dengan *f(t)* adalah total gaya dorong per unit massa yang dihasilkan oleh pelari. Adapun $\frac{v}{\tau}$ adalah gaya hambat per unit massa dengan τ konstanta redaman. Kecepatan awal seorang pelari saat diam adalah 0 jarak per satuan waktu (dalam hal ini $^m/_s$), sehingga

$$v\ (0) = 0 \tag{3}$$

Dalam asumsi Keller ada gaya maksimum konstan per unit massa yang dapat dicapai pelari, sehingga f harus memenuhi pertidaksamaan.

$$F(t) \leq F \tag{4}$$

Pada pemodelan ini, Keller memperkenalkan suatu teori tentang energi. Dikatakan bahwa pada saat keadaan awal, terdapat jumlah ketersediaan oksigen di dalam otot yang setara dengan energi awal yang dimiliki tubuh seseorang. Adapun laju perubahan suplai oksigen per unit waktu dinyatakan dalam persamaan berkut,

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - fv \tag{5}$$

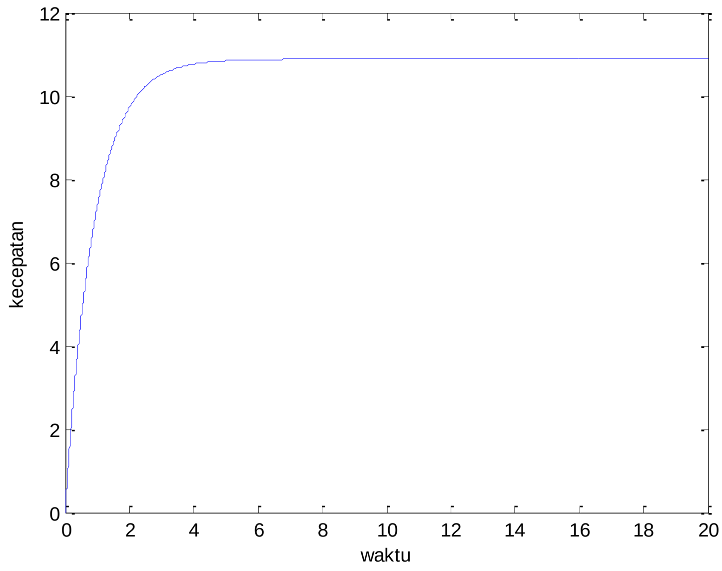
di mana σ adalah suplai oksigen per unit waktu pada saat seseorang tidak dalam keadaan berlari. Sedangkan fv adalah kebutuhan oksigen per unit waktu pada saat seseorang berlari. Karena energi yang ekivalen dengan ketersediaan oksigen tidak pernah negatif, maka $E\ (t)$ juga harus memenuhi pertidaksamaan

$$E(t) \geq 0 \tag{6}$$

Pada pemodelan ini, diperkenalkan istilah jarak kritis (D_c) yaitu suatu batas atas dari jarak lari di mana seorang atlit lari dapat mempertahankan gaya per unit massa maksimum. Jika jarak lari $D \leq D_c$, maka gaya per unit massa adalah sama dengan gaya per unit massa maksimum, yakni $f(t) = F$ di mana dalam kondisi tersebut kecepatan seorang atlit lari naik secara monoton dengan persamaan

$$v(t) = F\tau(1 - e^{-t/\tau}) \tag{7}$$

Grafik kecepatan terhadap waktu persamaan (7) tersebut ditunjukkan pada gambar 1 berikut,



Gambar 1

Akibatnya persamaan (1) menjadi

$$D = F\tau^2\left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1\right) \tag{8}$$

Persamaan di atas memberikan hubungan antara jarak dan waktu tempuh untuk jarak yang kurang dari jarak kritis.

Didefinisikan bahwa $E(t)$ sebagai energi yang setara dengan kebutuhan oksigen per unit massa pada suatu saat seseorang berlari, E_0 nilai awal dari $E(t)$ dan σ adalah energi yang ekivalen dengan nilai oksigen yang tersedia per unit massa saat seseorang tidak dalam keadaan berlari. Sehingga kondisi seorang atlit lari akan mempunyai energi awal sebagai kondisi awalnya, yakni

$$E(0) = E_0 \tag{9}$$

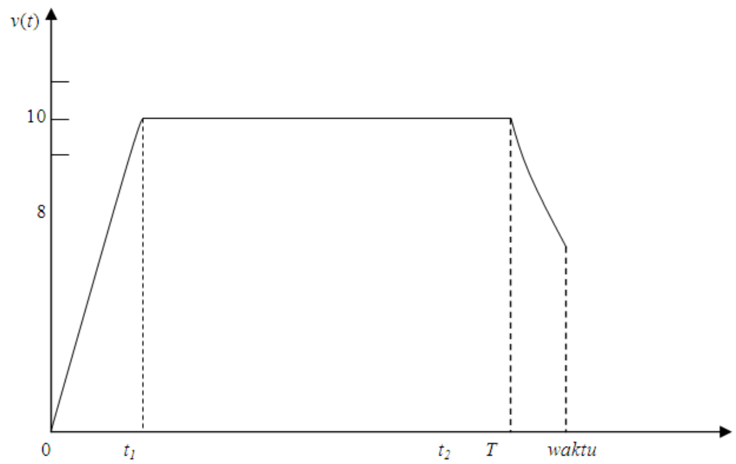
Untuk menentukan $E(t)$, kita gunakan persamaan (8), kecepatan $v(t)$ pada persamaan (5) dan (6) sehingga didapat

$$E_t = E_0 + \sigma t - F^2\tau^2\left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1\right) \tag{10}$$

Dengan mengatur $E(T_c) = 0$ kita dapatkan nilai terbesar t yang masih menjamin pelari dapat mempertahankan gaya maksimumnya. Dengan demikian D_c adalah nilai D dari persamaan (8) dengan nilai $t = T_c$. Untuk jarak yang lebih besar dari D_c, diasumsikan suatu strategi kecepatan, di mana $v(t)$ meningkat dengan persamaan (7) untuk $0 \le t \le t_1$, $v(t) = v(t_1) =$ konstan untuk $t_1 \le t \le t_2$, kemudian $v(t)$ menurun untuk $t_2 \le t \le T$. Persamaan $v(t)$ untuk $t_2 \le t \le T$ ditentukan dengan mengatur $\frac{dE}{dt} = 0$ pada persamaan (5), sehingga $f = \sigma / v$. Dengan nilai f tersebut, persamaan (2) dapat diselesaikan melalui persamaan

$$v^2(t) = \sigma\tau + [v^2(t_1) - \sigma\tau]e^{-2(t_2-t)/\tau} \tag{11}$$

Waktu t_1 dan t_2 dapat dicari dengan menghitung D dari persamaan (1) menggunakan tiga macam persamaan $v(t)$ yang telah diberikan, dan memaksimalkan D terhadap t_1 dan t_2. Grafik kecepatan terhadap waktu dari persamaan (11) ini ditunjukkan pada gambar 2 berikut,



Gambar 2

Nilai F dan τ didapat dengan *least square fit* dari data rekor yang ada sampai 200 m, sedang nilai E_0 dan σ didapat dengan least square fit dari data rekor 400 m sampai 1500 m. Didapat nilai-nilai tersebut sebagai berikut :

τ = 0.892 s　　　　　　　　E_0 = 575 kal/kg

F = 12.2 m/s^2　　　　　　　　σ = 9.93 kal/kg.s

Dari nilai-nilai parameter di atas, didapatkan nilai D_c = 291m.

2.2. Hasil pemodelan

Hasil pemodelan dari Keller tersebut dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Table world of track record

Distance (*D*)	Time Record (*T*) Min : sec	Time Record (Theory) Min : sec	Error (per cent)	Average velocity (Theory) m/sec
50m	5.5	5.48	-0.4	9.12
60m	6.5	6.40	-1.5	9.38
100m	9.9	10.07	1.7	9.93
200m	19.5	19.25	-1.3	10.39
400m	44.5	43.27	-2.8	9.24
800m	1:44.3	1:45.95	1.6	7.55
1000m	2:16.2	2:18.16	1.4	7.24
1500m	3:33.1	3:39.44	3.0	6.84

Source : Journal of Physycs Today/ September 1972

3. Modifikasi Pemodelan

Dari tinjauan teori Keller tersebut, tampak bahwa ada beberapa hal yang masih dapat dikembangkan dari model matematika Keller. *Pertama*, dapat dikembangkan strategi gaya berlari dengan asumsi gaya pelari tidak konstan. Pada tulisan ini akan disimulasikan dua *style* strategi gaya, yaitu gaya yang menurun secara linier dan gaya yang naik secara bertahap. *Kedua*, dapat dikembangkan satu model matematika pada lintasan lengkung.

3.1. Modifikasi dalam pengaturan strategi gaya.

Dalam kenyataannya, setiap pelari tidak dapat mempertahankan gaya yang konstan. Hal ini berhubungan dengan tingkat ketersediaan oksigen untuk proses pembakaran dalam tubuh. Untuk jarak yang kurang dari jarak kritis, tidak dilakukan modifikasi terhadap teori Keller karena hasil dan asumsi yang digunakan sudah cukup baik, mengingat seorang pelari dalam jarak pendek masih bisa mempertahankan gaya maksimumnya untuk menghasilkan kecepatan yang maksimum. Untuk jarak yang pendek hanya akan dilakukan least square fit dari data world record terbaru untuk mendapatkan nilai F dan τ yang baru. Adapun hasil dari least square terhadap lima data rekor tebaru untuk lari jarak hingga 200 m ini diperoleh nilai F = 16.3886 m/s^2 dan τ = 0.6510 s. Modifikasi hanya dilakukan dalam jarak yang sudah melebihi jarak kritis, dalam hal ini jarak 300m, 400m, 500m, 600m, 800m, 1000m dan 1500m.
Adapu strategi gaya yang dapat dimodifikasi adalah sebagai berikut :

1. Gaya per unit massa yang menurun konstan.
   Dalam hal ini, gaya *f(t)* diasumsikan sebagai

$$f(t)=F-ct \tag{12}$$

Sehingga persamaan (2) menjadi

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=F-ct \tag{13}$$

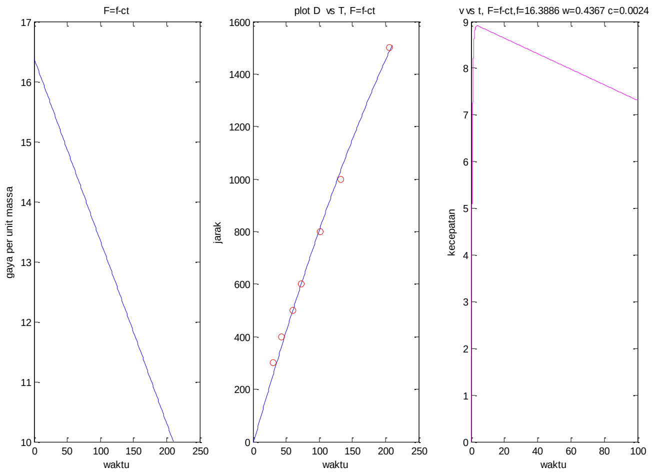
Persamaan kecepatan dan jarak yang didapat menjadi

$$v(t)=k-\mathrm{c}t\tau-\mathrm{k}e^{(-t/\tau)} \tag{14}$$

$$D=kt-\frac{1}{2}c\tau t^{2}+\tau k(e^{-t/\tau}-1) \tag{15}$$

Dengan $k=f\tau+\tau^{2}\mathrm{c}$.

Dari least square fit kita dapatkan harga τ = 0.5473 s dan c = 0.0304 m/s^3
Grafik kecepatan terhadap waktu dari gaya model 1 di atas adalah seperti ditunjukkan pada gambar 3 berikut.



Gambar 3

2. Gaya yang monoton naik
   Dalam hal ini, gaya *f(t)* diasumsikan sebagai

$$f(t)=F(1-e^{(-kt)}) \tag{16}$$

Sehingga persamaan (2) menjadi

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=\mathrm{F}(1-\mathrm{e}^{(-\mathrm{kt})}) \tag{17}$$

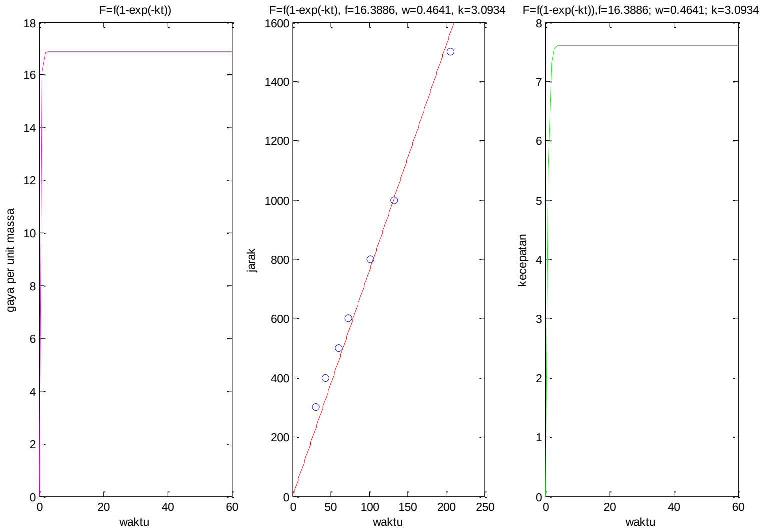
Persamaan kecepatan dan jarak yang didapat menjadi

$$v(t)=-\frac{e^{(-\frac{t}{\tau})}f\tau^2 k}{-1+k\tau}+\frac{f\tau(-1+k\tau+e^{(-kt)})}{-1+k\tau} \tag{18}$$

$$D=\frac{f\tau(-\tau^2k^2+1+\tau^2k^2e^{(-\frac{t}{\tau})}-kT+T\tau k^2-e^{(-kt)})}{(-1+k\tau)k} \tag{19}$$

Dari least square fit kita terhadap data rekor terbaru jarak 300m hingga 1500 m kita dapatkan harga τ = 0.4641s dan k = 3.0934 m/s^3

Grafik kecepatan terhadap waktu dari model gaya di atas adalah seperti ditunjukkan pada gambar 4.



Gambar 4

3.2. Modifikasi dalam lintasan berbentuk lengkung

Pada kenyataannya dalam lomba lari di dalam stadion, lintasan tidak selalu lurus. Lintasan lurus hanya pada lari 50m dan 100m. Jadi pada model ini juga akan dibahas suatu pemodelan dengan memperhitungkan gaya sentrifugal yang terjadi pada saat pelari berlari di lintasan yang melengkung. Untuk lomba di atas 400m, pengaruh gaya sentrifugal saat pelari berlari di lintasan yang melengkung menjadi tidak terlalu besar, tapi untuk lari hingga 400m, dimana kecepatan pelari masih cukup tinggi pengaruh kelengkungan menjadi tidak bisa diabaikan.

Dalam hal ini, gaya *f(t)* diasumsikan sebagai

$$f(t)=F-\frac{v^2}{R} \tag{20}$$

Sehingga persamaan (2) menjadi

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=F-\frac{v^2}{R} \tag{21}$$

Persamaan kecepatan dan jarak diperoleh dengan menggunakan MAPPLE ver.9. Harga F, τ dan c menggunakan hasil pada model 1 dan model 2. Sedangkan harga R dipakai kelngkungan pada lintasan keempat yang menurut IAAF sebesar 35 m.

Hasil dari seluruh modifikasi model Keller, melalui model straregi gaya 1, 2 dan 3 tersebut di atas dapat dilihat pada tabel 2 berikut :

Tabel 2

DATA HASIL PEMODELAN

Jarak *D*(T) (meter)	Rekor Waktu (Jam:min,det)	Atlet	Asal Negara	WaktuPemecah	Rekor Waktu Model 1	Error (per cent)	Rekor Waktu Model 2	Error (per cent)	Rekor Waktu Model 3	Error (per cent)
50.00	5.42	Donovan Bailey	CANADA	9 Februari 1996	5.34	-1.48	5.34	-1.48	5.34	-1.48
60.00	6.29	Maurece Greene	USA	1997.00	6.27	-0.32	6.27	-0.32	6.27	-0.32
100.00	9.78	Tim Montgomery	USA	14-Sep-02	10.02	2.45	10.02	2.45	10.02	2.45
150.00	14.93	John Regis	GBR	20 Agustus 1993	14.71	-1.47	14.71	-1.47	15.38	3.01
200.00	19.32	Michael Johnson	USA	1 Agustus 1996	19.39	0.36	19.39	0.36	20.86	7.97
300.00	30.85	Michael Johnson	USA	24 Maret 2000	35.11	13.81	40.23	30.41	36.08	16.95
400.00	43.18	Michael Johnson	USA	26 Agustus 1999	47.16	9.22	53.37	23.60	47.67	10.40
500.00	1:00,08	Donato Sabia	ITALIA	26 Mei 1984	59.52	-0.93	1:06,53	10.73		
600.00	1:12,81	Johnny Gray	USA	24 Mei 1986	1:12,21	-0.82	1:19,67	9.42		
800.00	1:41,11	Wilson Kipketer	DENMARK	24 Juli 1997	1:38,66	-2.42	1:45,97	4.80		
1000.00	2:11,96	Noah Ngeny	KENYA	5-Sep-99	2:06,15	-4.40	2:12,26	0.22		
1500.00	3:26,00	Hicham El Guerrouj	MAROKO	14 Juli 1998	03:27.5	0.73	3:18,00	-3.80		

4. Kesimpulan

Dari hasil modifikasi model style strategi gaya yang dibuat, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model matematik yang menggunakan strategi berlari dengan mempertahankan gaya konstan dapat digunakan hingga jarak berlari untuk suatu kompetisi hingga 200m.
2. Model matematika yang menggunakan strategi berlari dengan gaya menurun secara linier dapat digunakan relatif lebih baik untuk jarak lebih dari 500m
3. Model matematika yang menggunakan strategi berlari dengan gaya yang naik monoton dapat digunakan relatif lebih baik untuk jarak 1500m.
4. Model matematika dengan memperhitungkan gaya yang timbul pada lintasan melengkung untuk strategi yang dimodelkan di atas belum memberikan hasil yang optimal.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Joseph B . Keller, *A Theory of Competitive Running*, Physic Today, September 1973.

[2]. Joseph B . Keller , *Optimal Velocity in A Race*, American Mathematical Monthly, 1974.

[3]. Kevin R. Coombes, *Differential Equation with Maple*, John Willey&Sons,1996.

[4]. John H. Mathews, *Numerical Methods using Matlab*, Prentice Hall, 1999.