Jurnal Matematika Vol.6 No.1
November 2006 [19 : 23]

METODA ITERATIF PADA PERMASALAHAN MENARA HANOI

Erwin Harahap, Farid H Badruzzaman, M. Yusuf Fajar

Jurusan Matematika, Universitas Islam Bandung, Jalan Tamansari no. 1 Bandung 40116
erwin2h@yahoo.com, faridhbadruzzaman@yahoo.com, myusuffajar@yahoo.com

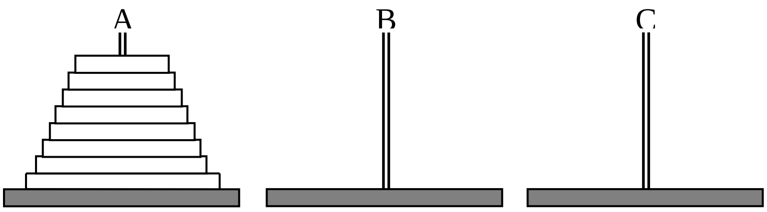
Abstrak. Berikut ini merupakan suatu telaah mengenai kasus teka-teki yang dikenal dengan nama Menara Hanoi yang dikemukakan oleh Eduard Lucas, seorang ahli matematika Perancis pada tahun 1883. Teka-teki ini berdasarkan pada legenda tentang Menara Brahma yang memiliki tiga tiang dan 64 cakram terpasang pada salah satu tiang. Ide utama pemecahan kasus teka-teki ini adalah menentukan banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan 8 cakram pada teka-teki Lucas, dari tiang satu ke tiang lainnya dengan aturan bahwa cakram dengan ukuran yang lebih kecil tidak boleh ditempatkan pada cakram yang berukuran lebih besar. Solusi akhir dari pemecahan kasus ini adalah diperoleh pola tertutup untuk menentukan banyaknya langkah pemindahan cakram.

Kata kunci: menara hanoi; relasi berulang; rekursif.

1. Menara Hanoi

Berikut ini adalah sebuah kasus yang telah seringkali dikaji oleh para ahli matematika, dan solusi dari permasalahan ini merupakan ide dasar dari relasi berulang. Solusi akhir yang diperoleh dalam kasus ini, sangat tergantung pada solusi untuk kasus yang paling sederhana dari masalah yang sama.

Perhatikan kembali sebuah teka-teki kecil yang asli yang dinamakan Menara Hanoi, ditemukan oleh ahli matematika perancis Edouard Lucas pada tahun 1883. Ide dasar teka-teki tersebut adalah diberikan sebuah menara dengan delapan cakram tersusun berurutan dari ukuran kecil ke ukuran besar pada salah satu dari tiga tiang yang tersedia.



Gambar 1. Tiga tiang dengan delapan cakram pada salah satunya

Tujuan dari teka-teki ini adalah memindahkan seluruh cakram pada tiang satu ke tiang lainnya, dengan ketentuan pindahkan hanya satu cakram pada satu satuan waktu dan tidak menempatkan cakram dengan ukuran yang lebih besar besar diatas cakram yang berukuran lebih kecil.

Lucas mengemukakan teka-tekinya berdasarkan pada legenda mengenai sebuah menara yang sangat besar, Menara Brahma, dimana diperkirakan memiliki 64 cakram emas murni terpasang pada salah satu dari tiga tiang berlian. Pada saat dimulainya waktu, kata lucas, tuhan menempatkan cakram-cakram emas ini pada tiang pertama dan memerintahkan kepada sekelompok pendeta untuk memindahkannya ke tiang ketiga, berdasarkan pada aturan pemindahan yang telah diuraikan sebelumnya, yaitu tidak menempatkan cakram ukuran besar diatas cakram dengan ukuran yang lebih kecil.

Masalah mengenai teka-teki Lucas atau juga legenda Menara Brahma, tidak dengan tiba-tiba memperoleh suatu solusi, akan tetapi pemikiran sederhana meyakinkan kita bahwa hal itu mungkin saja terjadi. Selanjutnya muncul sebuah pertanyaan : Apa yang terbaik yang dapat dilakukan? Yaitu berapa banyak langkah yang dibutuhkan dan cukup memenuhi untuk menyelesaikan tugas tersebut.

Cara untuk menjawab pertanyaan tersebut adalah dengan sedikit memperluas lingkup permasalahan. Menara Brahma memiliki 64 cakram dan menara hanoi hanya memiliki 8 cakram, selanjutnya pertimbangkan apa yang akan terjadi apabila terdapat n buah cakram.

Salah satu peningkatan dari perluasan lingkup permasalahan ini adalah bahwa kita dapat mengukur permasalahan yang jauh lebih sederhana. Pada kenyataannya, suatu permasalahan yang kompleks dan rumit akan dapat dipecahkan dengan cara melihat pada permasalahan yang kecil atau sederhana terlebih dahulu. Adalah mudah untuk dimengerti bahwa terdapat suatu cara untuk memindahkan hanya satu atau dua cakram pada sebuah tiang ke tiang lainnya. Melalui sejumlah percobaan sederhana dapat ditunjukkan banyaknya cara untuk memindahkan tiga buah cakram pada sebuah tiang.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah mengenalkan notasi yang tepat. Misal notasi T_n adalah banyaknya langkah minimum dalam memindahkan *n* cakram dari satu tiang ke tiang lainnya berdasarkan pada aturan Lucas. Dengan demikian T_1 diperoleh yaitu,

$$T_1 = 1, \qquad \text{... (1)}$$

dan

$$T_2 = 3, \qquad \text{... (2)}$$

$T_1 = 1$, karena hanya terdapat satu cara untuk memindahkan sebuah cakram dari satu tiang ke tiang lainnya. Untuk 2 buah cakram, maka akan terdapat 3 langkah dalam memindahkan keseluruhan cakram pada satu tiang ke tiang lainnya.

Kita juga bisa dapatkan nilai *T* untuk suatu nilai *n* lainnya dengan bebas, dengan mempertimbangkan hal terkecil yang ada, jelas bahwa untuk $n = 0$, maka

$$T_0 = 0, \qquad \text{... (3)}$$

karena sama sekali tidak ada langkah yang diperlukan untuk memindahkan antar tiang dengan jumlah cakram 0 atau tidak ada cakram sama sekali. Seorang ahli matematika yang cerdas tidak akan merasa malu untuk berpikir kecil, karena pola umum akan terasa mudah untuk dipahami ketika kasus ekstrim dapat dengan mudah dipahami, walaupun kasus ekstrim tersebut sangat pendek, sederhana dan dangkal.

Selanjutnya, dengan mencoba merubah cara pandang dan coba untuk berpikir luas, bagaimana caranya memindahkan tiang dengan ukuran besar yaitu dengan jumlah cakram yang lebih banyak. Percobaan dengan tiga cakram menunjukkan bahwa gagasan terbaik untuk memindahkan dua cakram teratas adalah dengan memindahkannya ke tiang tengah, kemudian pindahkan cakram terakhir ke tiang lainnya dan pindahkan dua cakram tersisa tadi ke tiang tersebut. Ini akan memberikan petunjuk untuk memindahkan *n* cakram pada pola umum.

Cara atau langkah-langkah yang dapat dilakukan adalah pertama pindahkan *n* - 1 cakram terkecil dari suatu tiang ke tiang yang tengah (dari tiang A ke tiang B) dan hal ini akan memerlukan langkah sebanyak T_{n-1} langkah, kemudian pindahkan cakram terbesar, hal ini akan memerlukan satu langkah pemindahan, dan akhirnya pindahkan kembali *n* - 1 cakram terkecil ke tiang yang memuat cakram terbesar, hal ini akan memerlukan langkah sebanyak T_{n-1}

langkah lagi. Dengan demikian kita dapat memindahkan n cakram, untuk suatu nilai $n > 0$, dalam kira-kira $2T_{n-1} + 1$ langkah:

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1, \qquad \text{... (4)}$$

untuk $n > 0$

Pertidaksamaan diatas menggunakan simbol $\leq$ sebagai pengganti =, ini terjadi karena analisis kita hanya membuktikan bahwa terdapat $2T_{n-1} + 1$ langkah, dan itu baru merupakan syarat cukup. Belum ditunjukkan bahwa $2T_{n-1} + 1$ merupakan syarat perlu. Selanjutnya harus dilakukan suatu cara bagaimana membuat langkah yang lebih singkat.

Akan tetapi adakah cara yang lebih baik ? kelihatannya tidak ada. Pada suatu langkah tertentu kita harus memindahkan cakram terbesar. Pada saat dilakukan pemindahan, n - 1 cakram terkecil seluruhnya harus berada pada satu tiang, dan hal itu berarti telah mengambil langkah pemindahan sebanyak T_{n-1} langkah. Kita bisa memindahkan caram terbesar lebih dari satu kali, jika tidak sedang dalam keadaan darurat. Akan tetapi setelah memindahkan cakram terbesar untuk yang terakhir kalinya kita harus memindahkan n - 1 cakram terkecil (dimana juga harus pada satu tiang) kembali ke tiang yang memuat cakram terbesar, ini juga akan memerlukan langkah pemindahan sebanyak T_{n-1} langkah. Maka,

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1, \qquad \text{... (5)}$$

untuk $n > 0$.

Berdasarkan pada (3), (4), dan (5), diperoleh :

$$T_0 = 0,$$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \qquad \text{... (6)}$$

untuk $n > 0$.

Perhatikan bahwa (6) berlaku untuk $T_1 = 1$ dan $T_2 = 3$. Percobaan kita dengan kasus kecil tidak hanya membantu untuk menemukan pola umum, tetapi juga memberikan cara mudah untuk memeriksa bahwa kita belum melakukan langkah yang salah.

Persamaan (6) dapat dikatakan sebagai sebuah perulangan (relasi rekursif). Hal ini memberikan batasan nilai dan sebuah persamaan untuk kasus umum dari kasus sebelumnya.

Relasi berulang mengijinkan kita untuk menentukan nilai T_n untuk suatu n yang diharapkan. Akan tetapi tidak seorangpun benar-benar menyukai menghitung dalam suatu relasi berulang, ketika nilai n menjadi sangat besar, karena hal tersebut memerlukan waktu proses yang sangat panjang. Relasi berulang hanya memberikan informasi tak langsung. Solusi atau nilai akhir dari suatu relasi berulang akan membuat kita lebih merasa lega. Oleh karena itu, setiap orang lebih menyukai suatu rumus atau pola yang cantik, rapi, dan tertutup untuk T_n yang membawa kita berhitung dengan cepat, bahkan untuk n yang sangat besar sekalipun. Dengan model atau pola tertutup, kita dapat memahami berapa sebenarnya nilai dari T_n.

2. Metoda Iteratif

Salah satu cara yang mungkin untuk menyelesaikan relasi berulang adalah dengan menebak solusi yang benar melalui metoda iteratif, kemudian dicoba untuk membuktikan bahwa tebakan tersebut memang benar, dan harapan terbaik dalam menebak solusi adalah dengan melihat kembali pada kasus sederhana. Selanjutnya, gunakan iterasi berikut :

$T_0 = 0$,
$T_1 = 2T_0 + 1 = 2(0) + 1 = 1$,
$T_2 = 2T_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$,
$T_3 = 2T_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$,
$T_4 = 2T_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$,
$T_5 = 2T_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31$,
$T_6 = 2T_5 + 1 = 2(31) + 1 = 63$,

$T_7 = 2T_6 + 1 = 2(63) + 1 = 127$
g
g
g
$T_n = 2^n - 1$

Berdasarkan pada pola iterasi, maka pola umum tertutup yang mungkin adalah :

$$T_n = 2^n - 1, \qquad ...(7)$$

untuk $n \geq 0$ dan setidaknya ini berlaku untuk $n \leq 7$

Induksi matematika merupakan cara umum untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan mengenai suatu bilangan bulat *n* adalah benar untuk setiap $n \geq n_o$. Pertama akan dibuktikan pernyataan ketika *n* memiliki nilai tekecil yaitu n_o. Selanjutnya akan dibuktikan pernyataan untuk $n > n_o$, asumsikan bahwa hal tersebut telah terbukti berlaku untuk semua nilai yang termasuk diantara n_o dan $n - 1$. Ini dinamakan induksi. Beberapa pembuktikan memberikan beberapa hasil tak terhingga dengan hanya sejumlah yang terhingga saja yang bekerja.

Relasi berulang sangat tepat dipasangkan dengan induksi matematika. Dalam hal ini, sebagai contoh (7) dapat diperoleh dengan mudah dari (6). Basis adalah trivial, karena

$$T_0 = 2^0 - 1 = 0,$$

dan induksi bekerja untuk $n > 0$ apabila kita asumsikan bahwa (7) berlaku ketika *n* digantikan dengan $n - 1$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$$

Dengan demikian (7) berlaku untuk setiap *n* dimana $n \geq 0$.

3. Penutup

Berdasarkan metoda iteratif, maka pola relasi berulang untuk menghitung banyaknya langkah untuk memindahkan cakram pada kasus menara hanoi dapat diselesaikan dengan menggunakan pola umum.

Pola relasi ulang yang berhasil disusun pada penyelesaian pencarian banyaknya langkah pemindahan cakram adalah

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Dimana *n* merupakan banyaknya cakram yang akan dipindahkan. Rumus ini cukup efektif untuk nilai *n* yang cukup kecil, namun tidak efektif untuk nilai *n* yang sangat besar, kecuali jika perhitungan dilakukan dengan menggunakan komputer.

Akhirnya melalui metoda iteratif dapat ditemukan pola umum

$$T_n = 2^n - 1$$

sehingga perhitungan dapat dilakukan dengan cepat.

Referensi

[1] Graham, Ronald L. (1990). Recurrent Problems. *Concrete Mathematics*, **1**: 1–16., Addison-Wesley.

[2] Johnsonbaugh, Richard. (1993). Solving Recurrent Relations. *Discrete Mathematics*, **5**: 269-283., Macmillan.

[3] Rosen, Kenneth H. (1999). Reccurent Relations and Solving Recurrent Relations. *Discrete Mathematics and Its Applications*, **5**: 308-332., McGraw-Hill