Jurnal Matematika Vol.6 No.1
November 2006 [1 : 7]

PEMETAAN MÖBIUS

Gani Gunawan

Jurusan Matematika, UNISBA, Jalan Tamansari No 1, Bandung,40116, Indonesia
ggan06@yahoo.com

Abstrak Transformasi bilinear dapat dikomposisikan dari transformasi linear dan transformasi resiprok. Sifat-sifat geometris dari transformasi bilinear dapat diperoleh dari sifat geometris kedua transformasi tersebut. Dapat diperlihatkan bahwa himpunan semua transformasi bilinear membentuk struktur grup terhadap operasi komposisi fungsi dan isomorfis dengan himpunan semua matriks kompleks yang invertible berordo 2 x 2.

Kata kunci: Transformasi Möbius, Transformasi Bilinear

1. Pendahuluan

Sebelum masuk pada pembahasan transformasi bilinear terlebih dahulu dibahas tentang transformasi linear dan transformasi resiprok. Karena transformasi bilinear dapat dikomposisikan dari transformasi linear dan transformasi resiprok. Sehingga sifat-sifat geometris dari transformasi bilinear dapat diperoleh dari sifat geometris kedua transformasi tersebut.

Pada bagian selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa himpunan dari semua transformasi bilinear membentuk struktur grup terhadap operasi komposisi fungsi dan isomorfis dengan himpunan semua matriks kompleks yang invertible berordo 2 x 2.

2. Transformasi Linear

Definisi 1. (Transformasi Linear)

Suatu transformasi yang berbentuk $w = f(z) = az + b$, dengan $a, b \in C, a \neq 0$ disebut transformasi linear.

Sifat-sifat transformasi linear:

a. $f'(z) = a$, untuk setiap $z \in C$, maka f adalah transformasi entire atau transformasi analitik menyeluruh.
b. f adalah transformasi satu-satu, karena jika $z_1 \neq z_2$, maka $f(z_1) = az_1 + b \neq az_2 + b = f(z_2)$
c. Karena f transformasi satu-satu, maka f mempunyai transformasi invers, yaitu $f^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$, dengan a $\neq$ 0.
d. Transformasi linear adalah komposisi dari dua transformasi berikut: $\zeta = az$ dan $w = \zeta + b$.

Transformasi yang pertama, yaitu $\zeta = az$ merupakan suatu rotasi yang "memperpanjang" atau "memperpendek". Adapun alasannya adalah sebagai berikut:

Misal: $a = r_1 \text{ cis } \theta_1$ dan $z = r_2 \text{ cis } \theta_2$, maka

$$\begin{aligned} \zeta &= az && \dots (1)\\ &= r_1 \text{ cis } \theta_1 . r_2 \text{ cis } \theta_2 \\ &= r_1r_2 \{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)\} \\ &= r_1r_2 \{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\} \\ &= r_1r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

Jadi, $|\zeta| = |a|\,|z|$ dan $arg\ \zeta = arg\ a + arg\ z.$ … (2)

Kondisi yang mungkin dari transformasi yang pertama adalah sebagai berikut:

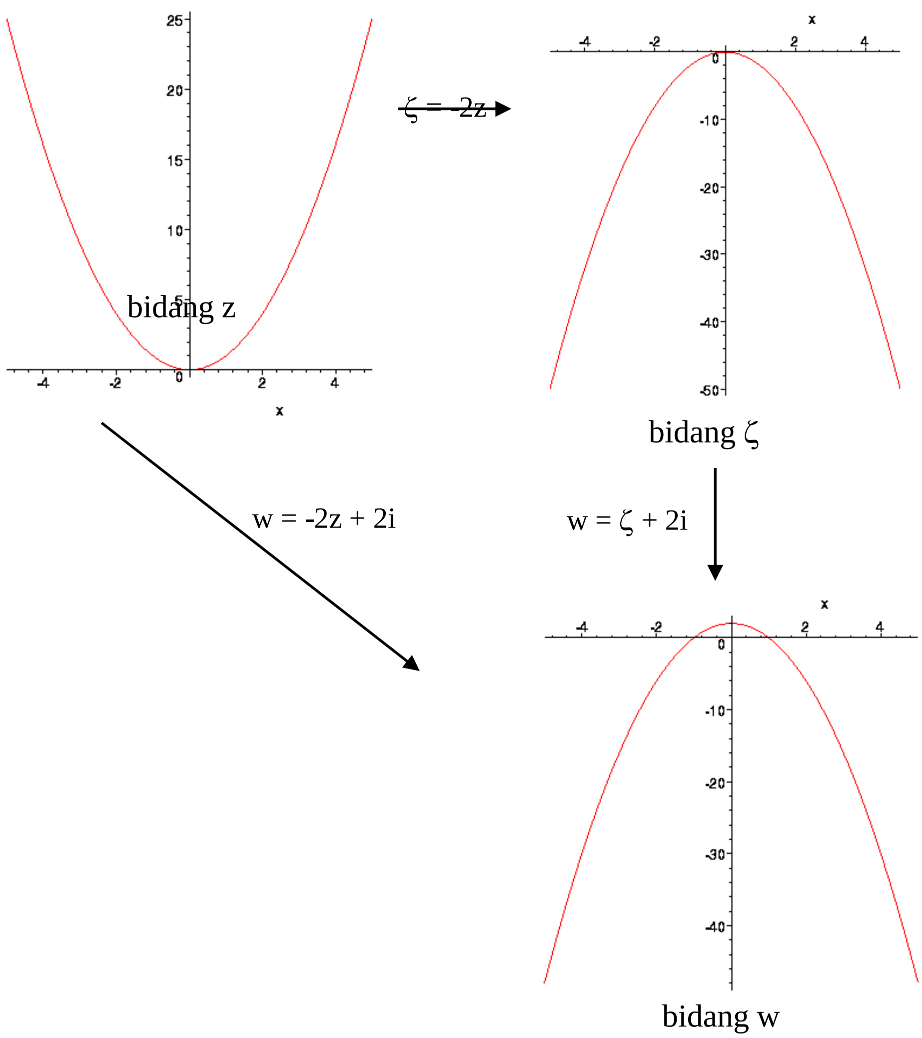
1) Jika $|a| = 1$, maka persamaan (2) menyatakan rotasi murni.
2) Jika $arg\ a = 0$ dan $|a| < 1$, maka persamaan (2) menyatakan "pemendekkan" murni.
3) Jika $arg\ a = 0$ dan $|a| > 1$, maka persamaan (2) menyatakan "pemanjangan" murni.
4) Jika $|a| = 1$ dan $arg\ a = 0$, maka diperoleh transformasi $\zeta = z$ yang disebut transformasi identitas.

Transformasi yang pertama merupakan suatu transformasi yang mengawetkan similaritas (kesebangunan) karena transformasi ini merotasikan setiap titik dengan sudut yang sama, yaitu *arg a* dan mengalikan modulus dari setiap titik dengan faktor yang sama, yaitu $|a|$.

Transformasi kedua, yaitu $w = \zeta + b$ merupakan translasi dengan vektor konstan b. Jadi, transformasi ini mentranslasikan setiap titik ζ dengan vektor konstan b. Karena merupakan translasi, maka transformasi yang kedua mengawetkan kongruensi.

Dari pembahasan di atas kita dapat menyimpulkan bahwa transformasi linear $w = az + b$ merupakan kombinasi dari rotasi dengan "pemanjangan" atau "pemendekan" dilanjutkan dengan translasi.

Perhatikan grafik hasil pemetaan parabola $y = x^2$ di bawah pemetaan w = - $2z + 2i$.



Gambar 1.

3. Transformasi Resiprok

Transformasi $w = f(z) = \frac{1}{z}$ disebut transformasi resiprok. Transformasi ini adalah fungsi satu-satu antara bidang z (kecuali $z = 0$) dengan bidang w (kecuali $w = 0$). $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, ada untuk setiap $z \neq 0$. Jadi transformasi resiprok analitik diseluruh bidang $C \sim \{0\}$. Titik $z = 0$ tidak mempunyai peta dibawah fungsi resiprok dan titik $w = 0$ tidak mempunyai prapeta dibawah fungsi resiprok. Karena itu diperkenalkan titik tak hingga (∞).

Secara intuitif, dibawah transformasi resiprok, titik-titik dibidang z disekitar $z = 0$ dipetakan ke titik-titik yang jauh dari $w = 0$ di bidang w dan titik-titik di bidang z yang jauh dari $z = 0$ dipetakan ke titik-titik yang dekat dari $w = 0$ di bidang w.

Misalkan $z = r$ cis t, maka

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos t + i\sin t)}\,\frac{(\cos t - i\sin t)}{(\cos t - i\sin t)}$$

$$= \frac{(\cos t - i\sin t)}{r(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \frac{1}{r}\left[\cos(-t) + i\sin(-t)\right] = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-t)$$

Jadi dibawah transformasi resiprok, suatu titik yang mempunyai modulus r dan argument t dipetakan ke titik yang mempunyai modulus $\frac{1}{r}$ dan argument $-t$.

Sekarang ambil sebarang titik $z \neq 0$ yang mempunyai modulus r dan argument t, dan terletak di dalam lingkaran satuan. Tarik garis L yang melalui titik z dari titik O dan tegak lurus ruas garis R, maka garis L akan memotong lingkaran satuan, misal di titik p_1 dan p_2. Dari titik p_1 dan p_2 dibuat garis singgung lingkaran, misal S dan T. Sehingga garis S dan T akan berpotongan di titik ξ pada garis R. Dalam hal ini $|\xi| = \frac{1}{r}$ dan arg $(\xi) = t$. Oleh karena itu $\xi = \frac{1}{\bar{z}}$.

Selanjutnya ditentukan titik $w = \bar{\xi}$ dengan mencerminkan titik ξ terhadap sumbu real. Jadi $|w| = \frac{1}{r}$ dan arg $(w) = -t$, maka $w = \frac{1}{z}$ dan w berada diluar lingkaran satuan.

Jadi secara umum, melalui transformasi resiprok, jika sebarang titik $z \neq 0$ berada pada lingkaran satuan, maka w juga berada pada lingkaran satuan. Jika sebarang titik $z \neq 0$ berada diluar lingkaran satuan, maka w berada di dalam lingkaran satuan. Hal ini disebabkan karena $|w| = \frac{1}{r}$. Akibatnya jika $|z| > 1$, maka $|w| < 1$, jika $|z| = 1$, maka $|w| = 1$, dan jika $|z| < 1$, maka $|w| > 1$.

Dari konstruksi geometri diatas, dapat dikatakan bahwa transformasi resiprok $w = \frac{1}{z}$ adalah komposisi dua fungsi $\xi = \frac{1}{\bar{z}}$ dan $w = \bar{\xi}$, yaitu inversi dalam lingkaran satuan ditunjukkan dengan konjugate.

Teorema 1.
Melalui transformasi resiprok, garis dan lingkaran dipetakan ke garis atau lingkaran

<u>Bukti:</u>
Pembuktian didasarkan pada dua fakta berikut:
Misal $z = x + iy$ dan $z \neq 0$, maka

(i). $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

Misal $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

(ii). Persamaan $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ merepresentasikan suatu lingkaran jika $a \neq 0$ atau merepresentasikan suatu garis jika $a = 0$. Akibatnya, sebarang garis atau lingkaran adalah representasi dari persamaan dengan bentuk

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \qquad ...(3)$$

Sekarang misalkan K adalah suatu lingkaran atau garis, maka K mempunyai bentuk persamaan $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$.

Dari (1) kita punyai $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$, maka

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Persamaan (3) jika dibagi dengan $x^2 + y^2$, maka diperoleh

$$a + \frac{bx}{x^2+y^2} + c\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{d}{x^2+y^2} = 0$$

atau
$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0 \qquad ... (4)$$

Persamaan (4) adalah sebuah garis jika $d = 0$ atau sebuah lingkaran jika $d \neq 0$.

4. Transformasi Bilinear/Transformasi Möbius

Definisi (transformasi bilinear):

Transformasi rasional $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, ad – bc ≠ 0 ... (5)

disebut transformasi bilinear, jika ad – bc = 0 maka $a = \frac{bc}{d}$.

Akibatnya, $f(z) = \frac{\frac{bc}{d}z + b}{cz+d} = \frac{\frac{b(cz+d)}{d}}{cz+d} = \frac{b}{d}$. Jadi, jika $ad - bc = 0$, maka akan diperoleh fungsi konstan untuk setiap $z \in C$.

Transformasi bilinear adalah transformasi yang analitik di C ~ { $\frac{c}{d}$ }. Jika $c = 0$, maka transformasi bilinear menjadi transformasi linear. Persamaan (5) merepresentasikan transformasi satu-satu dari bidang z yang diperluas ke bidang w yang diperluas. Secara khusus, titik $z = -\frac{d}{c}$ dipetakan ke titik w = ∞ dan titik z = ∞ dipetakan ke $w = \frac{a}{c}$.

Sifat transformasi bilinear:

a. Pemetaan Möbius bersifat satu-satu

Secara umum, jika w_1 , w_2 masing-masing adalah hasil dari transformasi Möbius untuk z_1 , z_2, maka

$$w_2 - w_1 = \frac{az_2 + b}{cz_2 - d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 - d}$$

$$= \frac{(az_2 + b)(cz_1 + d) - (az_1 + b)(cz_2 + d)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)}$$

$$= \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)}$$

Karena $ad - bc \neq 0$, maka peta dari titik z yang berbeda pada bidang Z menghasilkan nilai-nilai w yang berbeda pada bidang W. Jadi, jika $w_1 = w_2$, maka $z_1 = z_2$. Jadi, pemetaan Möbius bersifat satu-satu.

b. Transformasi bilinear adalah komposisi dari tiga transformasi berikut:
$\zeta = cz + d$, $\xi = \dfrac{1}{\zeta}$, dan $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c}\xi$. Dengan kata lain, transformasi bilinear dapat dikomposisikan dari transformasi linear, transformasi resiprok, dan transformasi linear lagi.
Bukti:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\xi = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c\zeta} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{1}{c}\left(\frac{acz + ad + bc - ad}{cz + d}\right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

c. Transformasi bilinear memetakan garis lurus dan lingkaran ke garis lurus dan lingkaran. (Tentu saja suatu lingkaran dapat dipetakan ke garis lurus dan sebaliknya). Hal ini akibat langsung dari sifat 1 dan sifat transformasi resiprok.

d. Misal: $G = \left\{ f : f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0 \right\}$, maka (G, o) merupakan grup.

Bukti:

1) Sifat tertutup

Misal: f_1 dan $f_2 \in G$ dan $f_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $f_2(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$ maka $f_1 o f_2(z) = f_1(f_2(z)) = f_1\left(\dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = \dfrac{a_1\left(\dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + d_1}$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + c_1 b_2 + d_1 d_2}.$$

Jadi, $f_1 o f_2(z) \in G$.

2) Sifat asosiatif dipenuhi, karena komposisi fungsi bersifat asosiatif;

3) Memiliki elemen identitas, yaitu $f(z) = z$;

4) Memiliki invers, yaitu $f^{-1}(z) = \dfrac{-dz + b}{cz - a}$

e. Misal: $G := \left\{ f \mid f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in C; ad - bc \neq 0; z \in C \right\}$.

Misal: $Gl(2,\mathbf{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a,b,c,d \in \pounds\ ;\ ad - bc \neq 0 \right\}$.

Didefinisikan pemetaan $\varphi : G \rightarrow Gl(2,\mathbf{C})$ dengan $\varphi(f(z)) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ untuk setiap $f \in G$ dan $z \in C$.

1) Akan ditunjukkan $\varphi : G \rightarrow Gl(2,\mathbf{C})$ homomorfik.
   Misal: $f, g \in G$ dan $z \in C$, maka

$$
\begin{aligned}
\varphi(f(z) \mathrm{o} g(z)) &= \varphi(f(g(z))) \\
&= \varphi(f(w)) \\
&= \varphi\left(\frac{aw+b}{cw+d} \right) \\
&= \varphi\left(\frac{a\dfrac{pz+q}{rz+s}+b}{c\dfrac{pz+q}{rz+s}+d} \right), \text{ untuk suatu } p, q, r, s, z \in C \text{ dengan } ps - qr \neq 0 \\
&= \varphi\left(\frac{apz+aq+brz+bs}{cpz+cq+drz+ds} \right) \\
&= \varphi\left(\frac{(ap+br)z+aq+bs}{(cp+dr)z+ds+cq} \right) \\
&= \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ pc+dr & ds+cq \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \varphi(f(z))\ \varphi(g(z))
\end{aligned}
$$

   Jadi $\varphi(f(z) \mathrm{o} g(z)) = \varphi(f(z))\ \varphi(g(z))$, untuk setiap $f, g \in G$ dan $z \in C$.
   $\varphi : G \rightarrow Gl(2,\mathbf{C})$ homomorfik atau $G \cong Gl(2,\mathbf{R})$.

2) Akan ditunjukkan fungsi $\varphi : G \rightarrow Gl(2,\mathbf{C})$ adalah fungsi satu-satu.
   Misal: $f, g \in G$ maka $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dan $g(z) = \dfrac{pz+q}{rz+s}$, dengan $a, b, c, d, p, q, r, s \in C$ dan $ad - bc \neq 0$; $ps - qr \neq 0$.
   Misal: $\varphi(f(z)) = \varphi(g(z))$, $z \in C$, maka $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$.
   Jadi diperoleh bahwa $a = p$, $b = q$, $c = r$ dan $d = s$.
   Akibatnya $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{pz+q}{rz+s} = g(z)$.

Karena $\varphi : G \rightarrow Gl(2,\mathbf{C})$ homomorfik dan satu-satu, maka $\varphi : G \rightarrow Gl(2,\mathbf{C})$ adalah suatu isomorphisma. Jadi $(G,\mathrm{o}) \approx (Gl(2,\mathbf{C}), .)$.

f. z_0 disebut fixed point dari transformasi f jika $f(z_0) = z_0$. Misal: f adalah transformasi bilinear. Jika ∞ adalah fixed point dari f, maka terdapat bilangan kompleks a, b sehingga $f(z) = az + b$.

Bukti:

Misal: $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. $f(\infty) = \infty$ jika $c = 0$. Akibatnya, terdapat $a' = \dfrac{a}{d}, b' = \dfrac{b}{d}$ sehingga $f(z) = a'z + b'$.

g. Misal: f transformasi bilinear. Jika f mempunyai tiga fixed point, maka $f(z) = z$.
Bukti:

Misal: ∞ bukan fixed point f, maka $c \neq 0$. Misal: z_1 fixed point f, maka $\dfrac{az_1 + b}{cz_1 + d} = z_1$ atau $cz_1^2 + (d - a)\, z_1 - b = 0$. Persamaan ini mempunyai paling banyak 2 akar, maka f mempunyai paling banyak dua buah fixed point. Jadi, ∞ adalah fixed point dari f.

Karena ∞ adalah fixed point dari f, maka, menurut sifat 4, terdapat bilangan kompleks a, b sehingga $f(z) = az + b$. Misal: z_2 adalah fixed point dari f, maka $f(z_2) = z_2$ atau $az_2 + b = z_2$. Jika $a \neq 1$, maka kita peroleh $z_2 = \dfrac{b}{1-a}$ adalah fixed point dari f. Jika $a = 1$, maka $f(z) = z + b$ dan $z + b = z$ bila hanya bila $b = 0$. Jadi, $f(z) = z$.

h. Fungsi $f(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ adalah fungsi tunggal sedemikian hingga $f(z_1) = 0, f(z_2) = \infty$, $f(z_3) = 1$. Jika $w = f(z)$ adalah fungsi sedemikian hingga $f(z_i) = w_i$,untuk $i = 1, 2\ 3$,maka w dan z dihubungkan oleh rumus $\dfrac{w - w_1}{w - w_2}\dfrac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

i. Misal: z_1, z_2, z_3 tripel titik yang berbeda satu sama lain di bidang z dan w_1, w_2, w_3 tripel titik yang berbeda satu sama lain di bidang w, maka terdapat transformasi bilinear yang tunggal yang memetakan z_i ke w_i, untuk $i = 1, 2, 3$.
Bukti:
Andaikan transformasi bilinear yang memetakan z_i ke w_i, untuk $i = 1, 2, 3$ tidak tunggal, maka terdapat f dan g, dengan $f \neq g$ yang memetakan z_i ke w_i, untuk $i = 1, 2, 3$.
Akibatnya $f \circ g^{-1}$ mempunyai tiga buah fixed point. Dari sifat g diperoleh $f \circ g^{-1}(w_i) = w_i$, untuk $i = 1, 2, 3$. Jadi, $f = g$, kontradiksi dengan pernyataan bahwa $f \neq g$.
Jadi, transformasi bilinear yang memetakan z_i ke w_i, untuk $i = 1, 2, 3$ tunggal.

5. Penutup

Dari pembahasan di atas diperoleh sifat-sifat transformasi bilinear sebagai berikut:

a. Transformasi bilinear dapat dikomposisikan dari transformasi linear, transformasi resiprok, dan transformasi linear lagi;
b. Transformasi bilinear memetakan garis lurus dan lingkaran ke garis lurus dan lingkaran;
c. Himpunan dari semua transformasi bilinear membentuk struktur grup terhadap operasi komposisi fungsi dan isomorfis dengan himpunan semua matriks kompleks yang invertible berordo 2 x 2.
d. Terdapat transformasi bilinear yang tunggal yang memetakan tiga buah titik yang berbeda satu sama lain di bidang z ke tiga buah titik yang berbeda satu sama lain ke bidang w.

Daftar Pustaka

[1] John D. Paliouras, (1975). *Complex Variables for Scientists and Engineers.* New York Macmillan Publishing.

[2] Serge Lang, (1993). *Complex Analysis.* New York. Springer Verlag.

[3] W.Churchil, (1994). *Complex Function*. New York. Macmillan Publishing.