Jurnal Matematika Vol.6 No.1
November 2006 [93 : 99]

MENGKONSTRUKSI SEGI-N BRAHMAGUPTA

Farid H Badruzzaman, Erwin Harahap, M. Yusuf Fajar

Jurusan Matematika, UNISBA, Jalan Tamansari No 1, Bandung,40116, Indonesia
faridhbadruzzaman@yahoo.com, erwin2h@gmail.com, myusuffajar@yahoo.com

Abstrak. Dalam mengkonstruksi segitiga *Heron* atau segiempat cyclic (segiempat yang dikonstruksi pada sebuah lingkaran) dimana sisi-sisinya merupakan bilangan bulat, dapat dilakukan dengan menggabungkan segitiga-segitiga Pytagoras. Dari segitiga-segitiga *Heron* dapat dibentuk segi-*n* Brahmagupta.

Kata kunci: Brahmagupta; *Heron*; Ptolemy;

1. Pendahuluan

Segitiga siku-siku dengan sisi-sisinya bilangan rasional disebut segitiga *Pythagoras* rasional. Jika sisinya merupakan bilangan bulat, maka disebut segitiga *Pythagoras*. Sebuah segi *n*, dengan sisi-sisi, diagonal dan luasnya rasional disebut segi-*n Heron* rasional, dimana *n*>3. Bila bilangan rasional-bilangan rasional dikonversikan ke bilangan bulat diperoleh sebuah segi-*n Heron*. Jika segi-*n Heron* adalah cyclic (segitiga dimana setiap titik sudutnya ada pada lingkaran), maka diperoleh segi *n* Brahmagupta.

2. Segitiga *Heron*

Ambil sebuah segitiga *Heron* ABC dengan sisinya adalah (*a*, *b*, *c*). Misal $\cos A = \frac{3}{5}$. Melalui dalil *cosinus*, sebuah segitiga dengan panjang sisi-sisinya (*a*, *b*, *c*) dapat dinyatakan dengan persamaan

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc$$
$$a^2 = \left(b - \frac{3}{5}c\right)^2 + \left(\frac{4}{5}c\right)^2 \qquad \text{... (1)}$$

Jadi $a, b-\frac{3}{c}c, \frac{4}{5}c$ merupakan triple Pythagoras.

Dalam sebuah teorema dinyatakan bahwa jika sebuah segitiga Pythagoras dengan sisi-sisinya (*a, b, c*) berlaku

$$(a,b,c) = \left(u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv\right) \qquad \text{... (2)}$$

u dan *v* bilangan asli dan *u* > *v*
Dari persamaan (1) dan (2), secara umum dapat dinyatakan bentuk berikut ini :

$$a = \lambda\left(u^2 + v^2\right) \qquad b - \frac{3}{5}c = \lambda\left(u^2 - v^2\right) \qquad \frac{4}{5}c = \lambda(2uv) \qquad \ldots (3)$$

dimana $\lambda = 1, 2, 3, \ldots.$

Nilai terkecil dari λ pada persamaan-persamaan (3) di atas adalah 2, sehingga

$$a = 2\left(u^2 + v^2\right)$$

$$b - \frac{3}{5}(5uv) = 2\left(u^2 - v^2\right) \rightarrow b = (u + 2v)(2u - v)$$

$$\frac{4}{5}c = 2(2uv) \rightarrow c = 5uv$$

$$(a, b, c) = \left[2\left(u^2 + v^2\right), (u + 2v)(2u - v), 5uv\right], \qquad \ldots (4)$$

dimana $(u, v) = 1;$ dan $u > \frac{1}{2}v$

Dengan cara yang sama dari sebuah segitiga *Heron* $A'B'C'$ yang memuat sudut suplemen dari A, diperoleh $\cos A' = -\frac{3}{5}$.

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\cos A$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 + \frac{6}{5}b'c'$$

$$a'^2 = \left(b' + \frac{3}{5}c'\right)^2 + \left(\frac{4}{5}c'\right)^2 \qquad \ldots (5)$$

Jadi $a', b' + \frac{3}{c}c', \frac{4}{5}c'$ merupakan triple Pythagoras, dan

$$a' = \lambda\left(u^2 + v^2\right) \qquad b' + \frac{3}{5}c' = \lambda\left(u^2 - v^2\right) \qquad \frac{4}{5}c' = \lambda(2uv) \qquad \ldots (6)$$

$\lambda = 1, 2, 3, \ldots.$

Nilai terkecil dari λ dari persamaan-persamaan (6) adalah 2, sehingga kita mempunyai

$$a' = 2\left(u^2 + v^2\right)$$

$$b + \frac{3}{5}(5uv) = 2\left(u^2 - v^2\right) \rightarrow b = (u - 2v)(2u + v)$$

$$\frac{4}{5}c' = 2(2uv) \rightarrow c' = 5uv$$

$$(a', b', c') = \left[2\left(u^2 + v^2\right), (u - 2v)(2u + v), 5uv\right], \text{ dimana } (u, v) = 1; u > 2v \qquad \ldots (7)$$

Dalam bentuk umum pada segitiga *Heron* untuk sebuah sudut A jika diberikan

$\cos A = \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ dan suplemennya $\cos A' = -\dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$, maka

$$(a,b,c) = \left[pq\left(u^2 + v^2\right), (pu - qv)(qu + pv), \left(p^2 + q^2\right)uv \right] \qquad \text{... (8)}$$

$$(u,v) = (p,q) = 1 \qquad u > \frac{q}{p}v \text{ dan } p > q$$

$$(a',b',c') = \left[pq\left(u^2 + v^2\right), (pu + qv)(qu - pv), \left(p^2 + q^2\right)uv \right] \qquad \text{... (9)}$$

$$(u,v) = (p,q) = 1 \qquad u > \frac{p}{q}v \text{ dan } p > q$$

Contoh 1

Jika *u* = 5 dan v = 1, dengan menggunakan persamaan (4) diperoleh $(a,b,c) = (52,63,25)$ dan dengan menggunakan persamaan (7) diperoleh $(a',b'c') = (52,33,25)$. Kedua pasangan tersebut dapat digabungkan pada sisi yang panjangnya 25. Hasil gabungan kedua segitiga tersebut diperoleh sebuah segitiga sama kaki dengan panjang sisinya adalah $(96,52,52)$ yang disederhanakan menjadi $(24,13,13)$

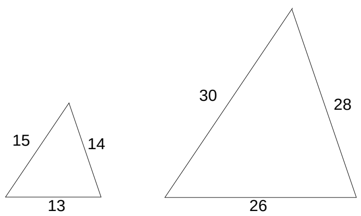
Contoh 2

Misal u = 3 dan v = 2

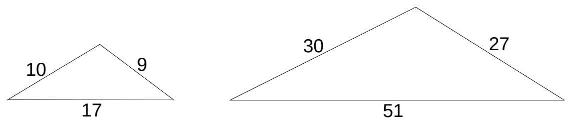
Dengan menggunakan persamaan (4) diperoleh $(a,b,c) = (13,14,15)$ lihat gambar (1)

Misal u = 4 dan v = 1

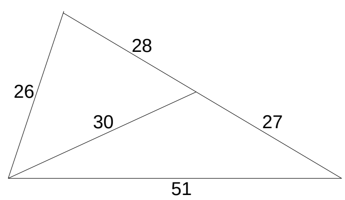
Dengan menggunakan persamaan (7) diperoleh $(a',b',c') = (17,9,10)$ lihat gambar (2)



Gambar 1



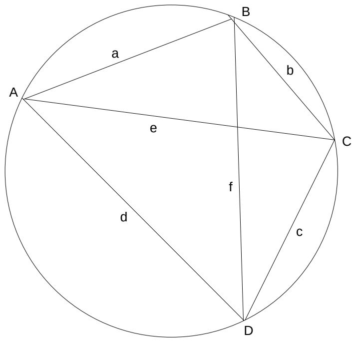
Gambar 2



Gambar 3

Diperoleh segitiga *Heron* baru dengan sisi-sisi $(55,26,51)$ lihat gambar (3)

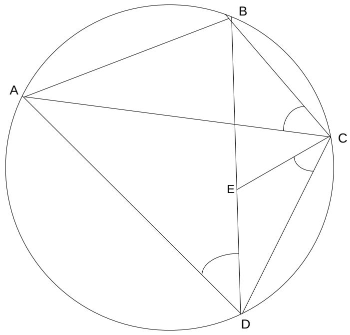
3. Teorema Ptolemy's



Gambar 4

$BC \cdot AD + CD \cdot AB = AC \cdot BD$

Bukti :



Gambar 5

Tetapkan sebuah titik E pada BD sedemikian sehingga $\angle BCA = \angle ECD$. Karena $\angle BAC = \angle BDC$ maka $\Delta ABC \cdot \Delta DEC$ sehingga $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{CD} \rightarrow AC \cdot ED = AB \cdot CD$. Karena $\Delta ADC \cdot \Delta BEC$. maka $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BE} \rightarrow AC \cdot BE = BC \cdot DA$. Sehingga

$AC \cdot BD = AC(BE + ED) = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

4. Mengkonstruksi Segi-*n* Brahmagupta

Dengan mengambil beberapa harga u dan v, diperoleh harga-harga (a, b, c)

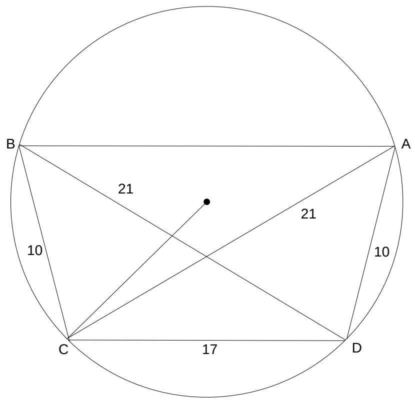
Tabel **1** : Segitiga *Heron*

	u	v	(a, b, c)	(a,b,c) diperbesar
1	**2**	**3**	**4**	**5**
T_1	3	1	(4, 5, 3)	(340, 425, 255)
T_2	4	1	(17, 21, 10)	(340, 420, 200)
T_3	5	3	(68, 77, 75)	(340, 385, 375)
T_4	7	6	(85, 76, 105)	(340, 304, 420)
T_5	9	2	(85, 104, 45)	(340, 416, 180)
T_6	13	1	(68, 75, 13)	(340, 375, 65)
T_7	4	1	(17, 9, 10)	(340, 180, 200)
T_8	13	1	(340, 297, 65)	(340, 297, 65)

Kolom 4 dan 5 untuk T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 menggunakan persamaan (4), sedangkan T_7, T_8 menggunakan persamaan (7)

Contoh 3

Misal (a, b, c) = (17, 21, 10). Bila kita gabungkan dengan dirinya sendiri (gambar 6). Karena $\angle CAD = \angle CBD$, ABCD adalah cyclic. Dengan menggunakan teorema Ptolemy's diperoleh $AB = \dfrac{341}{17}$ (sebuah bilangan rasional). Dengan memperbesar panjang sisi-sisinya dan digonalnya sebesar 17 kali, maka kita peroleh segiempat Brahmagupta ABCD (sebuah trapesium) dengan panjang sisinya AB = 341, BC = AD = 170, CD = 289, AC = BD = 357



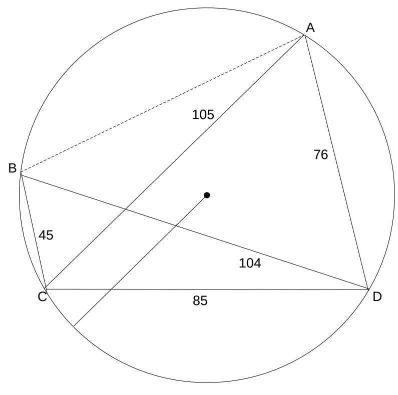
Gambar 6

Contoh 4

Misal panjang sisi dua buah segitiga *Heron* adalah (85, 76, 105) dan (85, 104, 45). Ada dua cara untuk mendapatkan segiempat cyclic

Cara I

Perhatikan gambar 7 di bawah ini

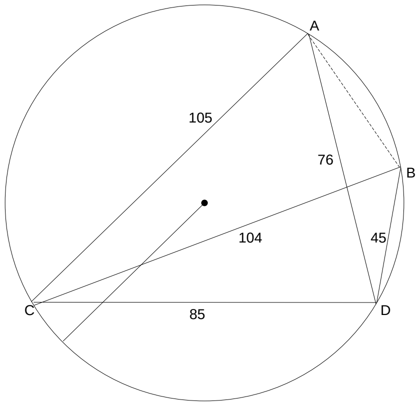


Gambar 7

Dengan menggunakan teorema Ptolemy, $AB = \dfrac{1500}{17}$. Dari gambar 7 di atas, kita lihat bahwa ABCD merupakan sebuah segiempat Brahmagupta

Cara II

Perhatikan gambar 8 di bawah ini



Gambar 8

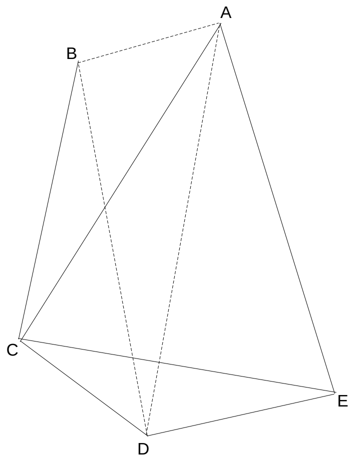
diperoleh $AB = \frac{187}{5}$. Dari gambar 8 diatas, kita lihat bahwa ABDC merupakan sebuah segiempat Brahmagupta. Dari kedua cara di atas, kita lihat bahwa penggabungan dua segitiga *Heron* menghasilkan segiempat Brahmagupta yang berbeda.

5. Brahmagupta Pentagon (segi lima Brahmagupta)

Untuk mengkontruksi Brahmagupta pentagon diperlukan tiga segitiga *Heron*. Di sini sebuah segitiga *Heron* dapat digunakan dua kali, sehingga sebuah segilima Brahmagupta (pentagon Brahmagupta) dapat dikonstruksi lebih dari dua cara.

Contoh 5

Misal kita ambil pasangan sisi-sisi segitiga *Heron* yang diperbesar T_3, T_4, dan T_7. Kombinasi pentagon Brahmagupta dapat dikonstruksi dengan segitiga *Heron* : T_3, T_3, T_4 ; T_3, T_4, T_4; T_7, T_7, T_3 dst



Gambar 9

Dari gambar 9 di atas, kita dapatkan sebuah pentagon Brahmagupta (segilima Brahmagupta). Untuk menghitung panjang AD dan BD gunakan teorema Ptolemy's dan diperoleh

$$AB = \frac{2023}{17}, \qquad AD = \frac{7217}{17}, \qquad BD = \frac{6820}{17}$$

6. Kesimpulan

1. Menggabungkan dua segitiga *Heron* atau lebih bisa menghasilkan segi-*n* Brahmagupta yang bentuknya berbeda
2. Untuk mengkonstruksi segi-*n* Brahmagupta diperlukan paling banyak *n*-2 segitiga *Heron*

Daftar Pustaka

[1] K.R.S. Sastry (2001). *Heron* Triangles : A Gergonne-Cevian and Median Perspective, *Forum Geometricorum* Volume 1 17-24

[2] K.R.S. Sastry (2002). Brahmagupta Quadrilateral, *Forum Geometricorum* Volume 2 167

[3] K.R.S. Sastry (2005). Contruction of Brahmagupta *n*-gons, *Forum Geometricorum*, Volume 5 119-126

[4] Santos David A (2002). *Pure Maths, Impure Thought*, Philadelphia.

[5] Fine Ira and Osler Thomas J, *The Remarkable Incircle a Triangle*, Department of Mathematics, Rowan University Glassboro, NJ 08028