Jurnal Matematika Vol.6 No.1
November 2006 [25 : 33]

TEOREMA CAYLEY-HAMILTON SEBAGAI SALAH SATU METODE DALAM PENGHITUNGAN FUNGSI MATRIKS

Onoy Rohaeni

Jurusan Matematika, UNISBA, Jalan Tamansari No 1, Bandung,40116, Indonesia

onoyrohaeni@yahoo.com

Abstrak. Tulisan ini membahas penghitungan fungsi matriks, dengan asumsi bahwa matriks yang dimaksud adalah berukuran *nxn*. Adapun metode yang digunakan dalam penghitungan fungsi matriks ini menggunakan teorema Cayley-Hamilton. Melalui teorema ini, akan diperoleh nilai eigen rangkap dan nilai eigen yang berbeda. Selanjutnya nilai-nilai eigen ini diimplementasikan pada penghitungan fungsi matriks. Sebagai salah satu contoh implementasi dari fungsi matriks dapat digunakan dalam menentukan keluaran dari sistem waktu diskrit.

Kata kunci : fungsi matriks; matriks; nilai eigen

1. Pendahuluan

Fungsi dari sebuah matriks A dengan A adalah suatu matriks kuadrat yang berukuran *nxn* dinyatakan dengan *f*(A). Untuk menghitung fungsi matriks ini (Gabel, 1987 : 70), dapat diselesaikan secara langsung yaitu dengan menggunakan perkalian matriks berlipat *k*, AxAxAx…xA yang dinyatakan sebagai matriks A^k. Matriks A^k ini kadang-kadang disebut sebagai matriks transisi (*transition matrix*) atau *fundamental* dari sistem. Tetapi, karena hasilnya kurang akurat terutama untuk matriks yang berukuran besar, maka untuk menyelesaikan fungsi matriks ini diperlukan suatu bentuk rumus dengan harapan agar dapat memberikan pengertian mengenai struktur dan pemecahannya.

Kegunaan dari fungsi matriks ini (Gabel, 1987:9) adalah untuk menentukan keluaran (*Output*) dari sistem waktu diskrit. Sebuah waktu diskrit mencirikan bagaimana suatu barisan masukan (*input*) {u(*k*)} ditransformasikan ke dalam suatu barisan keluaran {*y*(*k*)}.

Pada umumnya, sistem-sistem waktu diskrit digunakan untuk memproses sinyal-sinyal waktu kontinu. Salah satu contoh penerapan sistem-sistem diskrit adalah dalam bidang sistem audio digital piringan kompak (*compact-disk audio digital*).

Salah satu metode untuk menghitung A^k dan fungsi-fungsi dari A yang lainnya dalam bentuk rumus akan diselesaikan dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton.

Bagian berikut menyajikan secara rinci bagaimana menghitung A^k dan fungsi-fungsi matriks lainnya dalam bentuk rumus untuk semua nilai *k*.

2. Nilai-nilai Eigen

Andaikan A suatu matriks *nxn*. Skalar λ dinyatakan sebagai nilai eigen dari A jika terdapat suatu vektor tak nol **x**, sehingga

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \qquad \text{…. (1)}$$

Vektor **x** disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran *nxn* maka kita menuliskan kembali A**x** = λ **x** sebagai

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\, I\,\mathbf{x}$$

atau secara ekivalen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{…. (2)}$$

Jadi, λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika persamaan (2) memiliki suatu penyelesaian tak trivial.
Persamaan (2) akan mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \text{…. (3)}$$

Persamaan (3) disebut *persamaan karakteristik* untuk matriks A.
Sebagai contoh, persamaan karakteristik dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Jadi, $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ adalah persamaan karakteristik dari matriks A. Akar-akar dari persamaan karakteristik disebut nilai-nilai eigen (*eigen values*). Dalam kasus ini, nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 1$$

Jika determinan pada persamaan (3) diperluas, akan kita peroleh suatu polinom berderajat ke–*n* dalam variabel λ yang dinyatakan dengan

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad \text{…. (4)}$$

Persamaan (4) disebut polinom karakteristik. Akar dari polinom karakteristik ini adalah nilai-nilai eigen dari matriks A. Jika kita menghitung akar menurut kelipatannya, maka polinom karakteristik akan mempunyai *n* akar. Jadi, matriks A akan mempunyai *n* nilai eigen dimana beberapa diantaranya kemungkinan akan berulang dan beberapa nilai eigen lainnya kemungkinan berupa bilangan kompleks.

3. Fungsi dari Matriks

Dalam bagian ini, membahas metode untuk menghitung A^k untuk semua nilai *k* dan fungsi-fungsi dari A yang lainnya dalam bentuk rumus.

Salah satu metode yang akan dibahas untuk menghitung fungsi-fungsi matriks ini didasarkan pada teorema Cayley-Hamilton (Ayres,1989 :186), yang menyatakan bahwa setiap matriks *n*x*n* memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri, dimana persamaan karakteristik dari matriks A didefinisikan sebagai

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Sebagai contoh, jika kita substitusikan A menggantikan λ dalam $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, maka akan diperoleh persamaan matriks

$$A^2 - 6A + 5A^0 = 0$$

dengan A^0 didefinisikan sebagai I (matriks identitas), yakni

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Begitu juga, seandainya kita substitusikan A menggantikan λ dalam

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

akan diperoleh

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I = 0 \qquad \ldots (5)$$

Jadi, A^n dapat dinyatakan dalam matriks-matriks A^{n-1}, A^{n-2}, …, A dan I, dengan I adalah matriks identitas dan 0 adalah matriks yang semua elemen-elemenya nol.
Secara ekivalen persamaan (5) dinyatakan sebagai

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1A - a_0 \qquad \ldots (6)$$

Jika persamaan (6) dikalikan dengan A, akan menghasilkan

$$A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - \ldots - a_1A^2 - a_0A \qquad \ldots (7)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6) pada persamaan (7) diperoleh

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -a_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1A - a_0I) - \ldots - a_1A^2 - a_0A \\ &= (a^2_{n-1} - a_{n-2})A^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3})A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0I \qquad \ldots (8) \end{aligned}$$

Dengan melanjutkan proses ini, kita lihat bahwa sebarang pangkat dari A dapat dinyatakan sebagai suatu jumlah terbobotkan dari matriks-matriks yang mengandung A hingga pangkat tertinggi n-1. Oleh karena itu, fungsi matriks dapat sebagai

$$\begin{aligned} f(A) &= \alpha_0I + \alpha_1A + \ldots + \alpha_kA^k + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_kA^k \qquad \ldots (9) \end{aligned}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} f(A) &= \beta_0I + \beta_1A + \ldots + \beta_{n-1}A^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_kA^k \qquad \ldots (10) \end{aligned}$$

Untuk mengembangkan suatu metode yang lebih mudah, kita kembali ke persamaan karakteristik dari matriks A, yaitu

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Dengan mengikuti langkah-langkah yang sama seperti di atas, maka dapat dinyatakan nilai-nilai eigen λ^n, λ^{n+1}, λ^{n+2}, dan seterusnya dalam λ, λ^2, …, λ^{n-1}.
Sehingga

$$\lambda^n = -a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0 \qquad \text{….(11)}$$

dan

$$\lambda^{n+1} = (a^2_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3})\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0 \qquad \text{…. (12)}$$

Dengan melanjutkan proses ini, polinom-polinom λ dalam λ, λ^2, …, λ^{n-1} yang dapat ditulis sebagai

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_k\lambda^k + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\lambda^k \qquad \text{…. (13)}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$f(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\lambda^k \qquad \text{…. (14)}$$

Dengan mensubstitusikan λ_1, λ_2, …, λ_n dalam persamaan (14) akan diperoleh n buah persamaan dalam sebagai n variabel yang belum diketahui, sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= \beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ f(\lambda_2) &= \beta_0 + \beta_1\lambda_2 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_2^{n-1} \\ &\vdots \\ f(\lambda_n) &= \beta_0 + \beta_1\lambda_n + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{aligned} \qquad \text{…. (15)}$$

Sehingga dari persamaan (15) akan diperoleh koefisien-koefisien β_0, β_1, …,β_{n-1}. Koefisien-koefisien β_0, β_1, …,β_{n-1} inilah yang digunakan untuk menyelesaikan penghitungan fungsi matriks $f(A)$.

Sebagai contoh, untuk mencari $f(A)$ dimana $f(A) = A^k$, dan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.
Untuk menghitung fungsi matriks ini, kita gunakan persamaan (14) yaitu

$$f(\lambda) = \lambda^k = \beta_0 + \beta_1 \lambda$$

dan dengan menggunakan persamaan (14) diperoleh

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \beta_0 + \beta_1\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^k = \beta_0 + \beta_1\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

Dengan menyelesaikan β_0 dan β_1 yang tak diketahui, akan diperoleh

$$\beta_0 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k (2 - 2^k) \quad \text{dan} \quad \beta_1 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k (4.2^k - 4)$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (10), penghitungan fungsi matriks diselesaikan dengan cara

$$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k = \beta_0\,\mathrm{I} + \beta_1 \mathrm{A}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \begin{bmatrix} 2-2^k & 0 \\ 0 & 2-2^k \end{bmatrix} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \begin{bmatrix} 2.(2^k-1 & 0 \\ 2^k-1 & 2^k-1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 2^k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh kasus di atas hanya berlaku apabila nilai-nilai eigennya berbeda. Sedangkan untuk persamaan karakteristik, yaitu det (A - λ I) = 0 yang memiliki nilai-nilai eigen rangkap, maka jumlah persamaan bebas linear yang muncul akan lebih sedikit bila dibandingkan dengan *n* buah persamaan bebas linear dalam persamaan (15).

Untuk menghitung fungsi matriks yang memiliki nilai-nilai eigen rangkap, sebagai landasannya akan digunakan teorema berikut.

Teorema:(Gabel,1987: 74-75)
Misalkan A adalah sebuah matriks *n*x*n* dengan n_0 buah nilai eigen λ_1, λ_2, …, λ_{n0} yang tak sama (jika tidak ada nilai eigen yang rangkap maka $n_0 = n$, jika ada maka $n_0 < n$). Misalkan nilai eigen λ_I terjadi dengan kerangkapan (*multiplicity*) m_i, dan didefinisikan polinom-polinom

$$\mathrm{P(A)} = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m \mathrm{A}^m \qquad \text{…. (16)}$$

$$\mathrm{P}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_m \lambda^m$$

$$f(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathrm{A}^k \qquad \text{…. (17)}$$

Maka matriks *f*(A) identik dengan matriks P(A) jika dan hanya jika

$$f(\lambda_i) = P(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n_0 \qquad \ldots. (18)$$

dan

$$\left.\frac{d^q}{d\lambda^q} f(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^q}{d\lambda^q} P(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} , \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n_0 \\ q=1,2,\ldots,m_i-1 \end{matrix} \qquad \ldots. (19)$$

Contoh:
Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dalam kasus ini, persamaan karakteristiknya adalah

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)^2 = 0$$

yang mana memiliki dua nilai eigen rangkap $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.
Dengan menggunakan persamaan (18) diperoleh

$$f(\lambda) = \lambda^k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \beta_0 + \beta_1\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

dan dengan menggunakan persamaan (19) akan diperoleh

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = k\lambda^{k-1} = k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \beta_1$$

Sehingga,

$$\beta_1 = k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad \text{dan} \qquad \beta_0 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k (1 - k)$$

Jadi, berdasarkan persamaan (10), akan diperoleh fungsi matriks yang dinyatakan dengan

$$f(A) = A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^k$$

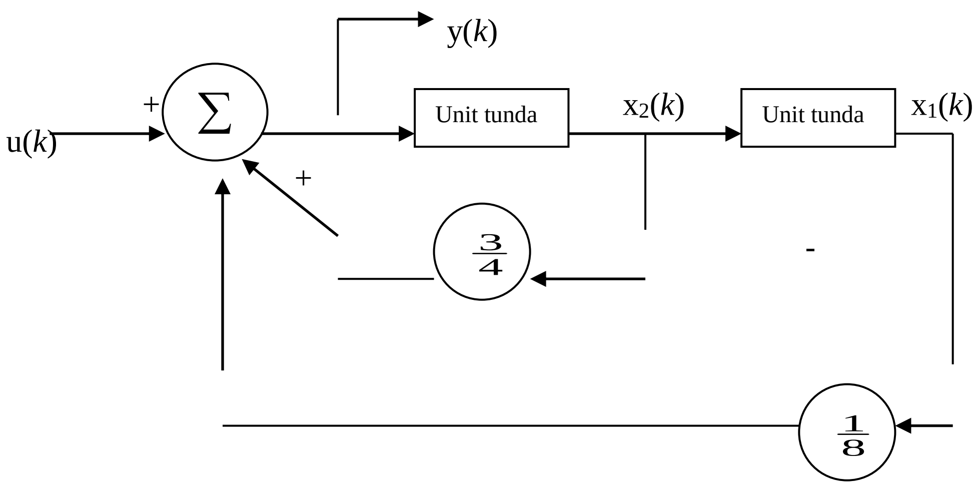
$$= \beta_0 I + \beta_1 A$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & 1-k \end{bmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

4. Contoh Penggunaan Fungsi Matriks

Sebagai salah satu contoh penggunaan dari fungsi matriks adalah menentukan keluaran dari sistem waktu diskrit. Misalnya, untuk menentukan keluaran (*Output*) dari sistem waktu diskrit yang dinyatakan dengan y(k), diilustrasikan dalam gambar rangkaian



Gambar. Rangkaian sistem waktu diskrit

terhadap masukan (*input*)

$$u(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k, & k \geq 0 \end{cases}$$

Dengan asumsi syarat-syarat awalnya nol, maka keadaan awal sistem adalah x(0) = 0. Sehingga untuk $k > 0$, vektor keadaan x(k) ditentukan oleh

$$x(k) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-m}\ \mathbf{B}u(m)$$

dan keluarannya oleh

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k)$$

di mana

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} x(k) + [1]u(k)$$

Jadi,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = [1]$$

Untuk menentukan fungsi matriks **A** yang dinyatakan dengan simbol $\mathbf{A}^n$, terlebih dahulu harus dicari persamaan karakteristik dari **A** yakni

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = 0$$

Jadi nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Oleh karena

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^n = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ -\frac{1}{8}\beta_1 & \beta_0 + \frac{3}{4}\beta_1 \end{bmatrix}$$

di mana β_0 dan β_1 adalah pemecahan-pemecahan dari

$$\beta_0 + \left(\tfrac{1}{4}\right)\beta_1 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

$$\beta_0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)\beta_1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

dengan menyelesaikan β_0 dan β_1, akan diperoleh

$$\beta_0 = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n \qquad \text{dan} \qquad \beta_1 = 4\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right)$$

Jadi,

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

atau

$$\mathbf{A}^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\mathbf{C}\,\mathbf{A}^{k-1-m}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1-m} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1-m} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-m} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-m}$$

Jadi, keluaran (*output*) y(*k*) dari sistem waktu diskrit pada gambar rangkaian di atas adalah

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{CA}^{k\text{-}1\text{-}m}\,\mathbf{B}u(m) + \mathbf{D}u(k)$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1}\left[2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-m} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-m}\right]\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}\sum_{m=0}^{k-1} 1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k}\sum_{m=0}^{k-1} 2^{k} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} k - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k}\frac{1-2^{k}}{1-2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}$$

$$= \begin{cases} 2k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k}, & k \geq 1 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Penutup

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa teorema Cayley-Hamilton ini adalah salah satu metode yang dapat digunakan sebagai landasan untuk menghitung fungsi matriks. yang dinyatakan dalam bentuk rumus

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^k$$

dengan membuktikan bahwa $A^0 = I$ (matriks identitas), $A^1 = A$, dan seterusnya.

Dalam menentukan koefisien $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ untuk nilai eigen yang berbeda dicari dengan menggunakan persamaan (15), dan untuk nilai eigen yang rangkap digunakan persamaan (19).

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard. (1981). *Elementary Linear Algebra*. New York, John Wiley.

[2] Ayres, Frank, terjemahan I Nyoman Susila. (1989). *Matriks*. Erlangga, Jakarta.

[3] Gabel, Robert A. (1987). *Signals and Linear Systems*. Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

[4] Leon, Steven J. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya.* Edisi Kelima, Erlangga, Bandung.