Jurnal Matematika Vol.6 No.1
November 2006 [35 : 54]

JENIS-JENIS ORDINAL BARISAN CACAH SEBAGAI PERLUASAN BILANGAN HINGGA BESERTA HIRARKI-HIRARKINYA*

Ravi Ahmad Salim
ravisalim@yahoo.com
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Islam Bandung

Ernastuti*
ernas@staff.gunadarma.ac.id
Staf-staf tetap Universitas Gunadarma

Erwin Harahap**
erwin2h@yahoo.com
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Islam Bandung

Norawati**
nora_2006@yahoo.com
Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Islam Bandung

Abstrak. Sifat menyerap pada penjumlahan ordinal adalah fenomena menghilangnya seluruh atau sebagian ordinal pada penjumlahan, misalnya $2+\omega = \omega$, $(\omega+2)+\omega = \omega2$. *Orca* adalah singkatan dari *ordinal barisan cacah* yaitu barisan-barisan bilangan cacah tertentu sebagaimana didefinisikan di bawah. Pertama tulisan ini mengemukakan upaya melenyapkan sifat menyerap operasi penjumlahan ordinal melalui pembentukan korespondensi Φ antara sistem ordinal dengan sistem orca. Bertolak dari barisan-barisan konstan sebagai wakil bilangan cacah, dengan merumuskan "tambah satu" (+1) dan penjumlahan berbentuk S+S+S+... atas barisan-barisan bilangan cacah diperoleh orca-orca. Penjumlahan perluasan atas barisan ternyata mewakili penjumlahan ordinal tanpa penyerapan. Kedua tulisan ini membahas bagaimana orca-orca tersusun dalam sebuah hirarki yang didasarkan atas *polinom-polinom pendefinisi*nya. Dari hirarki ini dapat dikaitkan dengan hipotesis kontinum serta konsep kardinal-kardinal tak terjangkau dalam teori ordinal. Dengan demikian diperoleh sumbangan teori ordinal terhadap teori orca. Ketiga tulisan ini menjelaskan bagaimana mengembangkan sistem bilangan yang sejajar dengan sistem-sistem bilangan bulat, pecahan, dan real namun dengan memasukkan seluruh sistem orca dari bagian pertama ke dalamnya.

1. Menanggulangi Sifat Menyerap Operasi-operasi Ordinal dengan Ordinal Barisan Cacah

Operasi-operasi yang didefinisikan pada teori urutan rapi tidaklah mencerminkan kelanjutan dari operasi-operasi bilangan cacah versi ordinal-ordinal tak hingga dikarenakan sifat menyerapnya. Sifat menyerap pada penjumlahan ordinal adalah fenomena menghilangnya seluruh atau sebagian ordinal pada penjumlahan, misalnya $2+\omega = \omega$, $(\omega+2)+\omega = \omega2$. Untuk itu dibutuhkan suatu konsep lain yang pada tulisan ini dipilih *ordinal barisan cacah* atau disingkat *orca*.

Sekalipun merupakan objek yang tidak sama dengan ordinal, orca diperoleh dengan suatu proses membesar yang "ditopang" oleh proses membesarnya ordinal-ordinal himpunan, yaitu bersama dengan melangkahnya ordinal satu langkah, orca pun melangkah satu langkah. Kesejajaran langkah ini bersifat menguntungkan karena ada beberapa hal yang mungkin sukar untuk ditangani langsung dari sifat-sifat orca dapat disimpulkan hanya dengan memperhatikan sifat-sifat ordinal yang relevan atau sebaliknya.

Sebelum membahas pembicaraan inti diperlukan sedikit konsep pendahuluan yang sifatnya masih sangat umum. Yang pertama hanyalah berupa notasi *lambda Church* yang amat memudahkan membaca.

* Bagian A serta bagian B dan C dikemukakan secara terpisah sebagai dua makalah dan telah diseminarkan pada konferensi matematika nasional di Universitas Negeri Semarang tanggal 25 Juli 2006; ** Untuk bagian A ; *** Untuk bagian B dan C

Notasi A.1.

Misalkan $F{:}A \to B$ fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Notasi *lambda Church* dari F adalah $(\lambda x \in A)F(x)$ yang di dalam prakteknya sering ditulis $(\lambda x)F(x)$ atau $F(x)$ saja. Dalam hal yang terakhir ini disebut *notasi indeks* untuk menyatakan F sebagai "fungsi dengan variabel x". Namun notasi indeks terancam tidak dapat dibedakan dari pengertian "nilai F di suatu argumen x" bila tidak dibuat konvensi yang eksplisit tentang jenis huruf yang membedakan "indeks fungsi x" dengan "nilai x sembarang" seperti pada [3].
Berikutnya adalah konsep barisan yang biasa, hanya notasinya menggunakan lambda Church tadi.

Definisi A.1.

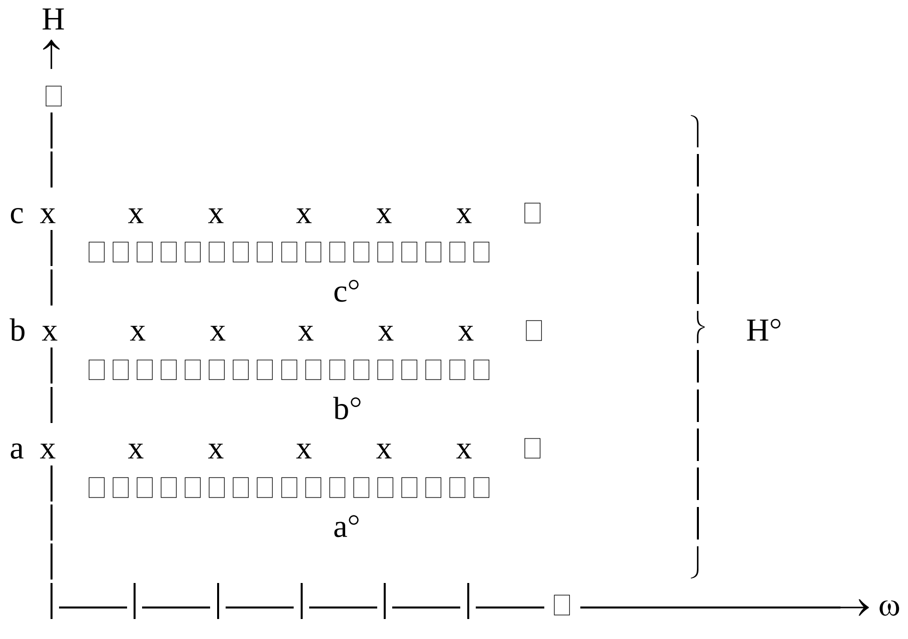
Misalkan H sebuah himpunan tak hampa. Sebuah *barisan unsur-unsur* H adalah pemetaan dari himpunan N dari semua bilangan asli ke H. Sebuah barisan dinotasikan sebagai $(s_1,s_2,s_3,\dots)$ yang artinya 1 dipetakan ke s_1, 2 dipetakan ke s_2, dan seterusnya. Namun notasi $(\lambda n)s_n$ akan menandakan $(\lambda n \in N)s_n$. Bila S sebuah barisan maka suku ke n dari barisan S ditulis S(n) atau S_n, yaitu $S = (S_1,S_2,S_3,\dots)$.

Contoh :

Barisan $(1,4,9,16,\dots)$ adalah $(\lambda n \in N)n^2$ atau ditulis lebih ringkas sebagai $(\lambda n)n^2$.

Definisi A.2.

Misalkan H sebuah himpunan, maka *himpunan wakil* untuk H adalah himpunan $H^\circ = \{h^\circ | h \in H\}$ dimana $h^\circ = (\lambda n)h$. Tanda ° kadang-kadang tidak ditulis bila dari konteksnya sudah jelas.



Gambar A.1. Himpunan dan unsur-unsur wakil.

Contoh.

Himpunan wakil dari bilangan-bilangan cacah $0,1,2,\dots$ adalah 0°, 2°, 3°, … Jadi bila $H = \{1,2,3,...\}$ maka $H^\circ = \{0^\circ, 2^\circ, 3^\circ,...\}$.

Definisi dibawah ini adalah alat bantu bagi pembicaraan selanjutnya, namun ada baiknya didefinisikan secara umum agar dapat diperhatikan keumuman konsep yang terkandung didalamnya sehingga dapat diterapkan kepada sembarang struktur aljabar.

Definisi A.3. Pemetaan Suku Demi Suku sebagai Perluasan Fungsi pada Barisan.
Misalkan H sebuah himpunan tak hampa serta $S_1,S_2,...S_n$ adalah n buah barisan unsur-unsur H dimana $S_k = (s_{k,1},s_{k,2},s_{k,3},\square)$. Misalkan $f:H^n \rightarrow H$ adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada H. Maka f definisinya dapat ditularkan kepada barisan-barisan sebagai
$f^*(S_1,S_2,...S_n) = (f(s_{1,1},\square,s_{n,1}), f(s_{1,2},\square,s_{n,2}), f(s_{1,3},\square,s_{n,3}) = (\lambda k)\ f(s_{1,k},\square,s_{n,k})$.

$$
\begin{array}{ccccc}
\square & & \square & & \square \\
s_1 & & t_1 & \square & s_1 + t_1 \\
s_1 & + & t_1 & \square & s_1 + t_1 \\
s_1 & & t_1 & \square & s_1 + t_1 \\
\square & & \square & & \square \\
 & & & & \\
s & + & t & \square & s+t
\end{array}
$$

Gambar A.3. Perluasan Penjumlahan

Contoh.
Misalkan $(a_1,a_2,a_3,\square)$ dan $(b_1,b_2,b_3,\square)$ merupakan barisan bilangan-bilangan real. Maka:
1) $\sin(a_1,a_2,a_3,\square) = (\sin a_1,\sin a_2,\sin a_3,\square)$.
2) $(a_1,a_2,a_3,\square)^3 = (a_1^3,a_2^3,a_3^3,\square)$.
3) $(a_1,a_2,a_3,\square)+(b_1,b_2,b_3,\square) = (a_1+b_1,a_2+b_2,b_3+b_3,\square)$.
4) $(a_1,a_2,a_3,\square)(b_1,b_2,b_3,\square) = (a_1b_1,a_2b_2,b_3b_3,\square)$.
5) $(a_1,a_2,a_3,\square)$^$(b_1,b_2,b_3,\square) = (a_1$^$b_1,a_2$^$b_2,b_3$^$b_3,\square)$

dimana ^ melambangkan pemangkatan.

Berikut ini pembicaraan akan dikhususkan pada objek-objek tertentu saja, dimulai dengan definisi *ordinal barisan cacah* yang selanjutnya akan disebut *orca*. Dalam penulisan, orca-orca akan ditulis dengan huruf-huruf Latin (a,b,c, dan sebagainya), sedangkan ordinal-ordinal dengan huruf-huruf Yunani (α,β,γ, dan sebagainya).

Definisi A.4. Ordinal Barisan Cacah (Orca).
Ordinal-ordinal barisan cacah atau disingkat orca adalah barisan-barisan bilangan cacah yang diperoleh dari definisi dengan induksi transfinit untuk sebuah fungsi Φ dari ordinal-ordinal himpunan ke orca-orca berikut ini:
(1) $\Phi(0) = 0^\circ$ adalah sebuah orca.
(2) Bila orca $\Phi(\alpha)$ sudah terdefinisi, maka $\Phi(\alpha+1)$ adalah orca yang didefinisikan sebagai $\Phi(\alpha)+1^\circ$.
(3) Bila orca $\Phi(\gamma)$ sudah terdefinisi, maka $\Phi(\omega\gamma)$ didefinisikan sebagai $(\lambda n)n\Phi(\gamma)(n)$.

Kelas Φ(*Ord*) ditulis sebagai *Orca*. Baik *Ord* maupun *Orca* merupakan kelas-kelas sejati. Untuk memudahkan penulisan $\Phi(\alpha)$ terkadang ditulis α' saja. Sebaliknya bila s sebuah orca penulisan $\Phi^{-1}(s)$ terkadang ditulis s' saja.

Berikut ini adalah salah satu unsur istimewa orca yang memegang peran penting.
Notasi A.2.

Huruf w khusus digunakan untuk menyatakan $\omega' = (\lambda n)n\cdot 1 = (1,2,3,...)$. Akibatnya $\Phi(\omega\gamma) = w\Phi(\gamma)$.

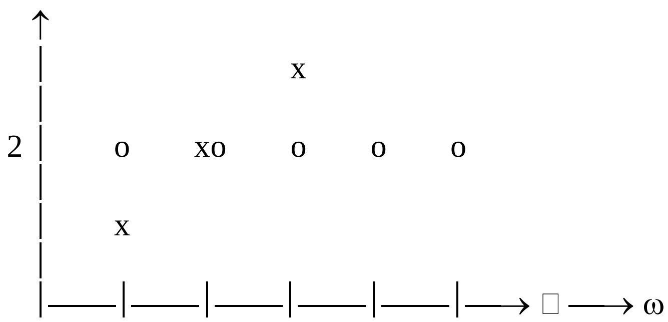
Berikut ini adalah definisi urutan untuk orca-orca.

Definisi A.5.
Misalkan a dan b orca-orca dengan $a = \alpha'$, $b = \beta'$. Maka a dikatakan *lebih kecil dari* b ($a<b$) bila $\alpha < \beta$.

Teorema berikut ini memungkinkan untuk melihat urutan orca-orca tanpa merujuk pada ordinal-ordinal.

Teorema A.1.
Misalkan a dan b orca-orca. Maka $a<b$ jika dan hanya jika hanya berhingga buah n yang tidak memenuhi $a_n<b_n$. Ungkapan terakhir ini terkadang diucapkan dengan ringkas sebagai "*pada akhirnya* $a_n<b_n$".

Bukti.
Misalkan $E = \{\gamma \mid$ untuk setiap α dan $\beta \leq \gamma$, bila $a = \alpha'$, $b = \beta'$, $a<b$ jika dan hanya jika pada akhirnya $a_n<b_n$ $\}$. Jelas $0\in E$ secara trivial. Sekarang andaikan λ adalah ordinal yang bersifat $Ord_\lambda \subseteq E$. Bila λ ordinal suksesor, $\lambda = \zeta+1$ untuk suatu ζ. Misalkan $z = \zeta'$. Mengingat $\lambda' = (\zeta+1)' = z+1° > z$ serta $(z+1°)(n) = z(n)+1 > z(n)$ untuk setiap n, maka $\lambda\in E$. Bila λ ordinal limit, maka $\lambda = \omega\zeta$ untuk suatu ζ. Maka $\lambda' = (\lambda n)n\zeta'(n)$. Jadi $\lambda' > k\zeta'$, untuk setiap bilangan asli k. Misalkan $\tau\in Ord_\lambda$ maka $\tau' < K\zeta'$ untuk suatu bilangan asli K, sebab bila tidak $\tau' \geq k°\zeta'$ untuk semua bilangan asli k sehingga $\tau' \geq w\zeta' = \lambda'$, sebuah kemustahilan. Misalkan $t = \tau'$ dan $z = \zeta'$. Menurut hipotesis induksi pada akhirnya $t(n) < Kz(n)$. Oleh karena itu pada akhirnya $z(n) < (wz)(n)$ mengingat untuk sembarang n berlaku $(wz)(n) = nz(n)$. Oleh karena itu $\lambda' > \tau'$ serta pada akhirnya $\lambda'(n) > \tau'(n)$, untuk setiap $\tau\in Ord_\lambda$. Jadi haruslah $\lambda\in E$ pula. Dengan prinsip induksi atas ordinal-ordinal dapat disimpulkan bahwa $E = Ord$. *Selesai*.



Gambar A.4. Ilustrasi $2 < w$, walaupun $w(1) < 2'(1) = 2$ dan $w(2) = 2'(2)$

Definisi A.6.
Misalkan α dan β dua ordinal. Maka *ekor dari* α *oleh* β adalah $c(\alpha,\beta) = \square\{\nu \mid$ ada η sehingga $\eta + \nu = \alpha$ dan $\alpha + \beta = \eta + \beta\}$.

Contoh:
Bila $\alpha = \omega+3$ dan $\beta = 3\omega+7$ maka $\alpha+\beta = 4\omega+7 = \omega+3\omega$. Jadi ekor $\omega+3$ oleh $3\omega+7$ adalah $c(\omega+3,3\omega+7) = 3$.

Teorema A.2.
Misalkan α dan β ordinal-ordinal. Maka,
$\alpha' + \beta' = \gamma(\alpha,\beta)'$ dengan $\gamma(\alpha,\beta) = \alpha + \beta + \sum_{n=0}^{\infty} S(n,\alpha,\beta)$ dimana secara rekursif didefinisikan $S(0,1,\alpha,\beta) = c(\alpha,\beta)$, $S(1,1,\alpha,\beta) = c(\beta,S(0,1,\alpha,\beta))$, serta
$S(k+1,1,\alpha,\beta) = c(S(k-1,1,\alpha,\beta),S(k,1,\alpha,\beta))$.

Bukti.
Dengan induksi atas α pada $\alpha'+\beta'$. Teorema di atas jelas berlaku untuk $\alpha = 0$ sebab $\gamma(\alpha,\beta) =\beta$. Misalkan teorema berlaku untuk sembarang $\alpha < \mu$. Bila

$$\mu = \tau+1,\ \mu'+\beta' = (\tau+1)'+\beta' = \tau'+1'+\beta' = \tau'+\beta'+1' = \gamma(\tau,\beta)+1'.$$

Sedangkan

$$\gamma(\mu,\beta) = \gamma(\tau+1,\beta) = (\tau+1) + \beta + \sum_{n=0}^{\infty} S(n,\tau+1,\beta).$$

Dalam hal ini

$$S(0,1,\tau+1,\beta) = c(\tau+1,\beta) = c(\tau,\beta)+1$$

bila β tak hingga, atau 0 bila tidak.

$$S(1,1,\tau+1,\beta) = c(\beta,S(0,1,\tau+1,\beta) = c(\beta,S(0,1,\tau+1,\beta)$$

bila β tak hingga, atau $c(\beta,S(0,1,\tau,\beta)+1$ bila tidak. Oleh karena itu ruas kanan adalah satu lebih dari $\gamma(\alpha,\beta)'$, karena kelebihan 1 yang muncul sekali pada proses penjumlahan itu terawetkan oleh penambahan ekor-ekor sisanya. Sedangkan

$$S(k+1,1,\tau+1,\beta) = S(k+1,1,\tau,\beta) \text{ untuk } k>1.$$

Jadi teorema berlaku untuk $\alpha = \mu$. Sekarang misalkan $\mu = \omega\lambda$ untuk suatu ordinal λ. Maka

$$\mu'+\beta' = \omega'\lambda'+\beta' = (\lambda n)[n\lambda'(n)+ \beta'(n)] = (\lambda n)\gamma(n\lambda,\beta)'$$

$$= (\lambda n)[n\lambda + \beta + \sum_{k=0}^{\infty} S(k,n\lambda,\beta)]'(n)...(**)\ S(0,n\lambda,\beta) = (n-1)\lambda+c(\lambda,\beta)$$

bila $\omega\lambda$ merupakan ruas β, atau $(n-m-1)\lambda + c(\lambda,\beta)$ bila m merupakan bilangan asli terkecil sehingga $m\lambda$ merupakan ruas β. Untuk $k \geq 1$, $S(k,n\lambda,\beta) = S(k,\lambda,\beta)$.
Jadi

$$(***) = (\lambda n)[n\lambda + \beta + (n-1)\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} S(k,\lambda,\beta)]'(n)$$

$$= [(\square n=1\infty(n\lambda + \beta + (n-1)\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} S(k,\lambda,\beta))]'$$

$$= [\omega\lambda + \beta + \omega\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} S(k,\lambda,\beta)]'$$

bila $\omega\lambda$ merupakan ruas β, atau

$$(\lambda n)[n\lambda + \beta + (n-m-1)\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} S(k,\lambda,\beta)]'(n)$$

yang juga sama dengan

$$[\omega\lambda + \beta + \omega\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} S(k,\lambda,\beta)]'$$

bila m merupakan bilangan asli terkecil sehingga $m\lambda$ merupakan ruas β. Adapun

$$\gamma(\mu,\beta) = \mu + \beta + \sum_{n=0}^{\infty} S(n,\mu,\beta),$$

dimana

$$S(0,\mu,\beta) = S(0,\omega\lambda,\beta) = \omega\lambda \text{ bila } \omega\lambda$$

merupakan ruas β, atau 0 bila tidak. Untuk $k \geq 1$,

$$S(k,\mu,\beta) = S(k,\omega\lambda,\beta) = S(k,\lambda,\beta). \text{ Jadi } \gamma(\mu,\beta) = \mu + \beta + \omega\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k,\beta) = (***).$$

Jadi teorema berlaku untuk $\alpha = \omega\lambda = \mu$. *Selesai*.

Teorema A.3.
Misalkan α dan β dua ordinal. Maka

$$\alpha'\beta' = T(\alpha,\beta)' \text{ di mana } T(\alpha,0) = 0,\ T(\alpha,\sigma+1) = (T(\alpha,\sigma)'+\alpha')' = T(\alpha,\sigma)+\alpha+\gamma(T(\alpha,\sigma),\alpha)$$

dimana $\gamma(\delta,\varepsilon)$ untuk sembarang ordinal δ dan ε adalah ordinal pada teorema III.A.1, serta $T(\alpha,\lambda) = \square_{\gamma<\lambda} T(\alpha,\gamma)$ untuk setiap ordinal limit λ.

Bukti.
Dengan induksi atas β pada $\alpha'\beta'$. Untuk $\beta = 1$, jelas teorema benar. Andaikan teorema benar untuk $\beta = \sigma$ maka

$$\alpha'\beta' = \alpha'(\sigma+1)' = \alpha'(\sigma'+1') = \alpha'\sigma'+\alpha' = T(\alpha,\sigma)'+\alpha' = T(\alpha,\sigma+1)' = T(\alpha,\beta)'$$

Andaikan teorema benar untuk semua $\sigma<\beta$ di mana $\beta = \omega\lambda$. Maka

$$\alpha'\beta' = \alpha'(\square_{n<\omega} n\lambda)' = \mathit{sup}_{n<\omega}\, \alpha'(n\lambda)' = \mathit{sup}_{n<\omega}\, T(\alpha,n\lambda)' = [\square_{n<\omega} T(\alpha,n\lambda)]' \text{ z}$$

Jadi teorema benar pula untuk $\beta = \omega\lambda$. *Selesai*.

Teorema A.4.
Misalkan α dan β dua ordinal. Maka $\alpha'\hat{}\beta' = U(\beta)'$ dimana

$$U(0) = 1,\ U(\sigma+1) = T(U(\sigma),\alpha)$$

dimana $T(\delta,\varepsilon)$ untuk sembarang ordinal δ dan ε adalah ordinal pada teorema III.A.1, serta $U(\alpha,\lambda) = \square_{\gamma<\lambda} U(\alpha,\gamma)$ untuk setiap ordinal limit λ.

Bukti.
Dengan induksi atas β pada $\alpha'\hat{}\beta'$. Untuk $\beta = 1$, jelas teorema benar. Andaikan teorema benar untuk $\beta = \sigma$ maka

$$\alpha'\hat{}\beta' = \alpha'\hat{}(\sigma+1)' = \alpha'\hat{}(\sigma'+1') = (\alpha'\hat{}\sigma')\alpha' = U(\alpha,\sigma)'\alpha' = U(\alpha,\sigma+1)' = U(\alpha,\beta)'$$

Andaikan teorema benar untuk semua $\sigma<\beta$ di mana $\beta = \omega\lambda$. Maka

$$\alpha'\hat{}\beta' = \alpha'\hat{}(\square_{n<\omega} n\lambda)' = \mathit{sup}_{n<\omega}\, \alpha'\hat{}(n\lambda)' = \mathit{sup}_{n<\omega}\, U(\alpha,n\lambda)' = [\square_{n<\omega} U(\alpha,n\lambda)]'$$

Jadi teorema benar pula untuk $\beta = \omega\lambda$. *Selesai*.

Definisi A.7. <u>Penjumlahan Orca-orca Tak Hingga Kali.</u>
Misalkan θ sebuah ordinal dan $U = \{u_\beta \mid \beta<\theta\}$barisan berindeks ordinal dari orca-orca. Untuk setiap orca tak nol t misalkan $U(t) = \{\beta<\theta \mid t = u_\beta \in S\}$. Karena $U(t)$ merupakan himpunan terurut rapi maka ia berkorespondensi satu-satu dengan sebuah ordinal tunggal $\theta(t)$. Misalkan $P(t) = \theta(t)'t$. Maka $P(t) = 0$ untuk setiap $t \notin U$. Misalkan $\upsilon = \square_{u\in U} u'$. Untuk setiap $\gamma<\upsilon$ didefinisikan $S(\gamma)$ sebagai berikut:

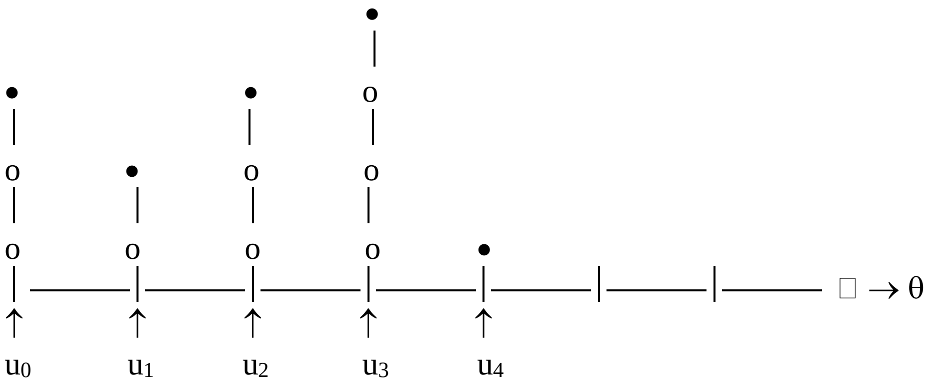
(1) $S(0) = P(0') = 0'$.
(2) Bila $S(\tau)$ sudah terdefinisi maka $S(\tau+1) = S(\tau) + P((\tau+1)')$.
(3) Bila γ ordinal limit dan $S(\tau)$ sudah terdefinisi untuk setiap $\tau<\gamma$ maka $S(\gamma) = \eta'$ dimana $\eta = \square_{\tau<\gamma} S(\tau)'$.

Maka *jumlah dari* U adalah $\sum U = \sum_{\beta<\theta} u_\beta$ yang didefinisikan sebagai λ' di mana $\lambda = \square_{\gamma<\upsilon}S(\gamma)'$.
Catatan: Bila α sembarang ordinal, maka α' sebenarnya adalah $\sum_{k\in\alpha}1$.

Contoh:

(1) $1+2+1+2+1+2+\ldots = 1+1+1+\ldots+2+2+2+\ldots = w+2w = 3w$.
(2) $1+1+1+\ldots+2+2+2+\ldots+3+3+3+\ldots+\ldots = w+2w+3w+\ldots = (1+2+3+\ldots)w = ww = w^2$.

Sekali penjumlahan telah terdefinisi, operasi-operasi lain tidak terlalu sulit didefinisikan. Pertama perkalian sembarang orca dengan indeks ordinal.



$$U(0) = \{4,\ldots\},\ U(1) = \{1,\ldots\},\ U(2) = \{0,2,\ldots\},\ U(3) = \{3,\ldots\}$$

Gambar A.2. Ilustrasi untuk $2+1+2+3+\ldots$

Definisi A.8. Perkalian Orca-orca Tak Hingga Kali.
Perkalian dua orca a dan b didefinsikan sebagai $\sum S$ di mana $S = \{s_\beta \mid \beta<\alpha\}$ dengan $s_\beta = a$ dan $\alpha = b'$, atau secara ekuivalen $s_\beta = b$ dan $\alpha = a'$. Misalkan θ sebuah ordinal dan $S = \{s_\beta \mid \beta<\theta\}$barisan berindeks ordinal dari orca-orca. Mula-mula didefinisikan fungsi s:*Ord*→*Orca* sebagai $s(\beta) = s_\beta$ untuk $\beta<\alpha$ dan $s(\mu) = 1$ untuk $\mu \geq \alpha$. Kemudian didefinisikan fungsi u:*Ord*→*Orca* sebagai berikut:
(1) Misalkan $u(0) = s(0)$.
(2) Bila $u(\alpha)$ sudah terdefinisi maka $u(\alpha+1) = u(\alpha)s(\alpha+1)$.
(3) Bila λ ordinal limit dan untuk semua $\beta<\lambda$, $u(\beta)$ sudah terdefinisi, maka $u(\alpha) = \gamma'$ dimana $\gamma = \square_{\beta<\alpha} u(\beta)'$.

Misalkan $\alpha_0 = \square\{\eta \mid u(\eta+\lambda) = u(\eta)$ untuk sembarang $\lambda\}$. *Hasilkali dari* S adalah orca $\prod S = \prod_{\beta<\alpha}s_\beta$ yang didefinisikan sebagai $t(\alpha_0)$.

Definisi A.9. Permangkatan Orca-orca Tak Hingga Kali.
Pemangkatan orca a *dengan* b didefinsikan sebagai $\prod S$ di mana $S = \{s_\beta \mid \beta<\alpha\}$ dengan $s_\beta = a$ dan $\alpha = b'$, atau secara ekuivalen $s_\beta = b$ dan $\alpha = a'$. Misalkan θ sebuah ordinal dan $S = \{s_\beta \mid \beta<\theta\}$barisan berindeks ordinal dari orca-orca. Mula-mula didefinisikan fungsi s:*Ord*→*Orca* sebagai $s(\beta) = s_\beta$ untuk $\beta<\alpha$ dan $s(\mu) = 1$ untuk $\mu \geq \alpha$. Kemudian didefinisikan fungsi u:*Ord*→*Orca* sebagai berikut:
(1) Misalkan $u(0) = s(0)$.
(2) Bila $u(\alpha)$ sudah terdefinisi maka $u(\alpha+1) = u(\alpha)$^$s(\alpha+1)$.
(3) Bila λ ordinal limit dan untuk semua $\beta<\lambda$, $u(\beta)$ sudah terdefinisi, maka $u(\alpha) = \gamma'$ di mana $\gamma = \square_{\beta<\alpha} u(\beta)'$.

Misalkan $\alpha_0 = \square\{\eta \mid u(\eta+\lambda) = u(\eta)$ untuk sembarang $\lambda\}$.
Pemangkatan dari S adalah orca $\prod S = \prod_{\beta<\alpha}s_\beta$ yang didefinisikan sebagai $t(\alpha_0)$.

Dari definisi orca berbagai sifat tentang operasi perluasan berulang-ulang tertentu dengan orca yang sama dapat diturunkan dan ternyata memberikan *sebagian* struktur isomorfisma kepada Φ terhadap operasi ordinal ke operasi orca, yaitu isomorfisma berlaku bagi suatu subkelas dari orca-orca saja. Teorema berikut ini hanyalah sebuah contoh.

Teorema A.5.
Misalkan α dan β adalah ordinal-ordinal di mana $\gamma(\alpha,\alpha) = 0$. Maka:

A. $(\alpha^{\beta})' = \alpha'\alpha'\alpha'\square = (\alpha')^{\beta'}$.

B. Misalkan ${}^{\wedge\beta}\alpha$ menandakan pemangkatan dengan α sendiri sebanyak β kali dimana pemangkatan terkiri didahulukan. Maka $({}^{\wedge\beta}\alpha) = {}^{\wedge\beta}\alpha$.

Bukti. Dengan induksi atas β.

<u>Untuk Point (A)</u>

Untuk $\beta = 0$, $(\alpha^{0})' = 1' = 1^{\circ} = (\alpha')^{0^{\circ}} = (\alpha')^{0'}$. Misalkan $\beta = \sigma+1$ dan $(\alpha^{\sigma})' = \alpha'^{\sigma'}$. Mengingat

$$\gamma(\alpha,\alpha),\ (\alpha^{\sigma+1})' = (\alpha^{\sigma}\alpha)' = (\alpha^{\sigma})'\alpha' = \alpha'^{\sigma'}\alpha' = \alpha'^{\sigma'+1} = \alpha'^{\beta'}$$

Sekarang misalkan $\beta = \omega\mu$ untuk suatu ordinal μ serta $(\alpha^{\sigma})' = \alpha'^{\sigma'}$ untuk semua $\sigma<\beta$. Mengingat

$$\gamma(\alpha,\alpha) = 0 \text{ maka } \alpha^{\omega\mu} = \square_{n<\omega}\,\alpha^{n\mu}. \text{ Jadi } (\alpha^{\beta})' = (\alpha^{\omega\mu})' = (\square_{n<\omega}\,\alpha^{n\mu})'$$

$$= \mathit{sup}_{n<\omega}\,(\alpha^{n\mu})' = \mathit{sup}_{n<\omega}\,\alpha'^{(n\mu)'} = \alpha'^{\,\sup\{(n\mu)' \mid n<\omega\}} = \alpha'^{(\square\{n\mu \mid n<\omega\})'} = \alpha'^{\beta'}.$$

<u>Untuk point (B).</u>

Untuk $\beta = 0$, $({}^{\wedge 0'}\alpha)' = \alpha' = {}^{\wedge 0'}\alpha'$. Misalkan $\beta = \sigma+1$ dan $({}^{\wedge\sigma}\alpha)' = {}^{\wedge\sigma'}\alpha'$. Mengingat

$$\gamma(\alpha,\alpha) = 0,\ ({}^{\wedge\sigma+1}\alpha)' = (({}^{\wedge\sigma}\alpha){}^{\wedge}\alpha)' = ({}^{\wedge\sigma}\alpha)'{}^{\wedge}\alpha' = ({}^{\wedge\sigma'}\alpha')\alpha' = {}^{\wedge\sigma'+1}\alpha' = {}^{\beta'}\alpha'$$

Sekarang misalkan $\beta = \omega\mu$ untuk suatu ordinal μ serta $({}^{\wedge\sigma}\alpha)' = {}^{\wedge\sigma'}\alpha'$ untuk semua $\sigma<\beta$. Mengingat

$$\gamma(\alpha,\alpha) = 0 \text{ maka } {}^{\wedge\omega\mu}\alpha = \square_{n<\omega}\,{}^{\wedge n\mu}\alpha. \text{ Jadi } ({}^{\wedge\beta}\alpha)' = ({}^{\wedge\omega\mu}\alpha)' = (\square_{n<\omega}\,{}^{\wedge n\mu}\alpha)'$$

$$= \mathit{sup}_{n<\omega}\,({}^{\wedge n\mu}\alpha)' = \mathit{sup}_{n<\omega}\,{}^{\wedge(n\mu)'}\alpha' = {}^{\wedge\,\sup\{(n\mu)' \mid n<\omega\}}\alpha' = {}^{\wedge(\square\{n\mu \mid n<\omega\})'}\alpha = {}^{\wedge\beta'}\alpha.$$

Selesai.

Dalam rangka membuat operasi atas ordinal-ordinal menjadi lebih mirip dengan aritmetika bilangan cacah maka didefinisikan operasi-operasi berikut ini.

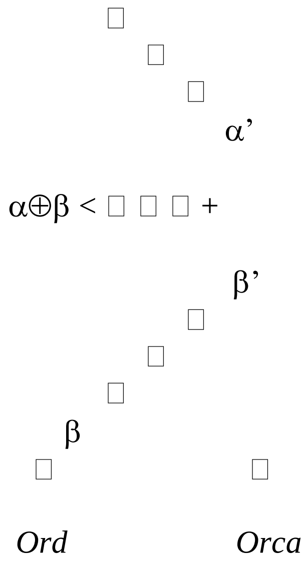
Definisi A.10.
Misalkan α dan β ordinal-ordinal. Maka didefinisikan *penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan yang diperbaiki* sebagai berikut:

(1) $\alpha\oplus\beta = (\alpha'+\beta')'$.

(2) $\alpha\otimes\beta = (\alpha'\beta')'$.

(3) $\alpha^{(\beta)} = (\alpha'{}^{\wedge}\beta')'$.

α



Gambar A.3. Ilustrasi definisi $\alpha\oplus\beta$

Namun sebaliknya orca-orca pun dapat mewarisi operasi-operasi dari ordinal-ordinal.

Definisi A.11.
Misalkan a dan b orca-orca. Maka didefinisikan *penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan bawaan* sebagai berikut:
(1) $a\oplus b = (a'+b')'$.
(2) $a\otimes b = (a'b')'$.
(3) $a^{(b)} = (a'\hat{}\,b')'$.

Dengan adanya definisi-definisi A.10 dan A.11, hubungan saling melengkapi antara ordinal dan orca nampak jelas. Namun masing-masing operasi tidak dapat benar-benar dimengerti ketika dibawa pada konteks lain yang bukan asalnya.

2. Hirarki Polinom untuk Orca-orca

Untuk mempelajari orca-orca cukup penting memperhatikan *fungsi pendefinisi* orca yaitu fungsi f pada orca $(\lambda n)f(n)$. Berikut ini sebuah teorema ke arah ini.

Teorema B.1.
Bila F sebuah fungsi yang melibatkan penjumlahan, perkalian atau pemangkatan hingga kali dari orca-orca maka F(w) adalah orca $(\lambda n)F(n)$.

Bukti.
Misalkan g dan h fungsi-fungsi yang memenuhi teorema, yaitu $g(w) = (\lambda n)g(n)$ dan $h(w) = (\lambda n)h(n)$. Bila F = g+h, gh, atau g^h, maka menurut definisi perluasan operasi-operasi F memenuhi teorema ini pula. *Selesai*.

Definisi B.1.
Misalkan H sebuah himpunan. *Polinom formal berparameter* H adalah tulisan berbentuk

$$p(x) = A_0+A_n x^{B(n)}+ A_n x^{B(n)}+\cdots A_K x^{B(K)} = A_0+\sum_{n=1}^{K} A_n x^{B(n)}$$

di mana $A_0,A_1,A_3,...B(1),B(2),B(3),...$ adalah anggota-anggota H dengan $B(i) \neq B(j)$ untuk $i\neq j$. A_i disebut *koefisien* dari $x^{B(i)}$.

Catatan: Jika H memiliki unsur-unsur yang serupa perilakunya dengan 0 dan 1 maka A_0 tidak dibutuhkan sebab bila B(n) = 0 maka $A_n x^{B(n)} = A_n.1 = A_n$, sebuah konstanta di H.

Dari definisi di atas jelas bahwa polinom-polinom formal berparameter orca memetakan orca-orca ke orca-orca yang tidak lebih kecil, sebab semua operasi yang terlibat pada sebuah polinom formal merupakan operasi yang sah menurut teorema III.B.1.

Contoh.

(1) $(\lambda n)p(n)$ di mana p(n) adalah polinom dari n berparameter cacah adalah sebuah orca. Dalam hal ini $(\lambda n)p(n) = p((\lambda n)n) = p(w)$.

(2) $(\lambda n)2^n = 2^{(\lambda n)n} = 2^w$, sebuah orca.

(3) $(\lambda n)n^n = (\lambda n)n^{(\lambda n)n} = w^w$, sebuah orca.

Berikut ini dikemukakan sebuah hirarki atau himpunan bertumpuk yang menyerupai hirarki Zermelo untuk ordinal-ordinal.

Teorema B.2. Hirarki ς atas *Orca*.

Misalkan ς:*Ord*$\rightarrow \wp$(*Orca*) adalah sebuah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

(1) $\varsigma(0)$ adalah himpunan wakil-wakil bilangan cacah.

(2) $\varsigma(1)$ didefinisikan sebagai himpunan semua ordinal berbentuk p(w) di mana p adalah polinom formal berparameter $\varsigma(0)\cup\{w\}$.

(3) Untuk ordinal-ordinal $\alpha>0$ didefinisikan $\varsigma(\alpha)$ sebagai himpunan semua ordinal berbentuk p(w) di mana p adalah polinom formal berparameter $\cup_{\beta<\alpha}\,\varsigma(\beta)$. Maka $\{\varsigma(\alpha)|\alpha\in Ord\}$ adalah sebuah hirarki atas *Orca*.

Bukti.

Jelas bahwa bila $\alpha<\beta$, $\varsigma(\alpha)\subset\varsigma(\beta)$. Tinggallah dibuktikan bahwa setiap orca terdapat pada suatu $\varsigma(\alpha)$. Jelas bahwa wakil-wakil bilangan cacah terdapat di dalam $\varsigma(0)$.

Bila $a \in \varsigma(\alpha)$ maka $a+1 \in \varsigma(\alpha)$ sebab a+1 didefinisikan oleh q(w) di mana q(x) = p(x)+1. Bila a orca limit di mana untuk setiap b<a, $b\in\varsigma(\beta(b))$ untuk suatu ordinal $\beta(b)$, maka $a = \alpha'$ untuk suatu ordinal limit α. Jadi $\alpha = \omega\lambda$ untuk suatu λ. Misalkan $\lambda' = p(w)$. Maka $(\omega\lambda)' = q(w)$ dimana q(x) = wp(x). Oleh karena itu bila $\lambda\in\varsigma(\tau)$, $\alpha\in\varsigma(\tau)$ pula. *Selesai*.

Definisi B.2.

Sebuah ordinal v dikatakan *orca limit* bila tidak ada orca lain u<v yang bersifat v = u+1. Definisi ini ekuivalen dengan mengatakan bahwa $v = \nu'$ untuk suatu ordinal limit ν.

Contoh:

(1) w adalah sebuah orca limit sebab $w = \omega'$ sedangkan ω ordinal limit.

(2) w+1 bukan orca limit, sebab $w+1 = (\omega+1)'$ sedangkan $\omega+1$ bukan ordinal limit.

(3) 2w adalah orca limit sebab $2w = (\omega 2)'$ sedangkan $\omega 2 = \omega+\omega$ adalah ordinal limit.

(4) 2^w adalah orca limit sebab $2^w = (2^\omega)'$ sedangkan 2^ω adalah ordinal limit sebab ia adalah kardinalitas dari $\wp(\omega)$.

Teorema B.3.

Sebuah orca limit v berbentuk ws untuk suatu orca s < v.

Bukti.

Misalkan v orca limit. Maka $v = \nu'$ untuk suatu ordinal limit ν. Menurut teorema, $\nu = \omega\gamma$ untuk suatu γ. Jadi $v = \nu' = (\omega\gamma)' = w\gamma' = ws$ di mana $s = \gamma'$. *Selesai*.

Definisi B.3.

(1) *Tingkat* suatu orca a adalah ordinal α sehingga $a \in \varsigma(\alpha)$ namun untuk setiap $\beta<\alpha$ $a \notin \varsigma(\beta)$.

(2) Sebuah *orca pembuka* adalah sebuah orca yang merupakan unsur terkecil dari tingkatnya pada hirarki ς. Orca pembuka tingkat $\alpha+1$ ditulis $W(\alpha)$. Untuk selanjutnya orca pembuka disebut pembuka saja.

Teorema B.4.
Sebuah pembuka adalah sebuah orca limit.

Bukti.
Andaikan a sebuah orca pembuka. Maka ia merupakan unsur terkecil pada tingkatnya. Sebutlah a unsur terkecil $\varsigma(\alpha)$. Andaikan a bukan orca limit maka a = b+1 untuk suatu orca b. Misalkan a = p(w) di mana p adalah polinom formal berparameter $\square_{\beta<\alpha}\varsigma(\beta)$. Maka b = q(w) di mana p(x) = q(x)+1. Jadi q sama-sama polinom formal berparameter $\square_{\beta<\alpha}\varsigma(\beta)$. Dengan demikian b setingkat dengan a, padahal b<a. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa a unsur terkecil pada tingkatnya. Jadi haruslah a sebuah orca limit. *Selesai*.

Teorema korespondensi mengakibatkan bahwa teorema induksi dan definisi dengan induksi berlaku pula bagi orca-orca.

Teorema B.5. Induksi untuk Orca-orca.
Misalkan S suatu predikat yang memenuhi:
(1) S(0°) benar.
(2) Untuk setiap orca a, bila S(a) benar, maka demikian pula S(a+1°).
(3) Bila b orca limit dan untuk setiap a<b, S(a) benar maka S(b) benar. Maka dapat disimpulkan bahwa S benar untuk semua orca.

Bukti.
Misalkan untuk sembarang ordinal α, $T(\alpha)$ adalah predikat $S(\alpha')$.
Misalkan $E = \{\alpha\in Ord \mid T(\alpha) \text{ benar}\}$. Dengan sifat S di atas maka semua syarat teorema induksi untuk ordinal-ordinal dipenuhi sehingga dapat disimpulkan bahwa
$\{\alpha\in Ord \mid T(\alpha) \text{ benar}\} = Ord$. Namun S(x) = T(x') sehingga
$G = \{a\in Orca \mid S(a) \text{ benar}\} = \Phi^{-1}(E) = \Phi^{-1}(Ord) = Orca$. *Selesai*.

Teorema B.6. Definisi dengan Induksi.
Misalkan $F:A\rightarrow K$ sebuah fungsi di mana $A \subseteq$ *Orca* dan K sekumpulan objek-objek. Misalkan F bersifat:
(1) F(0) terdefinisi.
(2) Untuk setiap orca a, bila F(a) terdefinisi, maka demikian pula F(a+1°).
(3) Bila b orca limit dan untuk setiap a<b, F(a) terdefinisi maka F(b) terdefinisi pula. Maka dapat disimpulkan bahwa A = *Orca*.

Bukti.
Misalkan $B = \Phi^{-1}(A)$ dan $G:B\rightarrow K$ didefinisikan oleh $G(\alpha) = F(\alpha')$. Hipotesis teorema merupakan terjemahan langsung dari hipotesis teorema definisis dengan induksi untuk ordinal-ordinal oleh pemetaan Φ. Maka dapat disimpulkan B = *Ord*. Oleh karena itu $A = \Phi(B) = Orca$. *Selesai*.

Teorema B.7.
Misalkan $g(1,\mu) = \mu'$ dan $g(\eta+1,\mu) = 2^{g(\eta,\mu)}$ untuk setiap ordinal η dan μ, serta

$$g(\eta,\mu) = (\lambda n)[g(n\beta,\mu)](n) \text{ bila } \eta = \omega\beta.$$

Maka

$$W(\upsilon) = w \text{ bila } \upsilon = 0,$$

serta untuk setiap

$$W(\upsilon) = g(\nu,\omega) \text{ bila } \upsilon = \nu+1 \text{ serta } W(\upsilon) = {}^2\!Log\ (g(\upsilon,\omega))$$

bila υ ordinal limit yang lebih besar dari ω.

Bukti.

Bahwa $W(\upsilon) = g(\nu,\omega)$ bila $\upsilon= \nu+1$ akan dibuktikan dengan induksi atas ordinal υ. Bahwa $W(0) = w$ dapat dilihat dari fakta $w = p(w)$ di mana $p(x)$ adalah polinom kostan yang nilainya w. Maka w adalah ordinal tingkat satu. Misalkan $q(x)$ adalah suatu deret pangkat formal dengan $(\lambda n)q(n)<w$. Jelas bahwa $(\lambda n)q(n)$ hingga atau $(\lambda n)q(n)$ bukan orca (bukan orca umpamanya dalam hal $q(x) = x-3$). Dalam kedua kasus ini $q(n)$ tidak dapat bertindak sebagai ordinal tingkat satu. Jadi $w = W(0)$.

Untuk membuktikan selebihnya dari teorema, andaikan $\upsilon = \nu+1$ dan setiap ordinal yang lebih kecil dari υ memenuhi teorema di atas. Mengingat $\upsilon>0$, polinom formal yang paling sederhana yang dapat melahirkan unsur pada tingkat ke υ adalah $p(x) = x^{W(\nu)}$. Di antara ordinal-ordinal tingkat ke υ yang dihasilkan p itu, yang terkecil adalah $p(2) = 2^{W(\nu)}$ yaitu $2^{g(\nu-1,\omega)} = g(\nu,\omega)$ bila ν bukan ordinal limit, atau $2\hat{}[{}^2Log\ (g(\nu,\omega))] = g(\nu,\omega)$ bila ν ordinal limit.

Sekarang dengan induksi pula akan dibuktikan bahwa $W(\upsilon) = {}^2Log\ (g(\upsilon,\omega))$ bila υ ordinal limit. Andaikan υ ordinal limit dan teorema di atas berlaku untuk setiap ordinal yang lebih kecil dari υ. Misalkan $\upsilon = \omega\sigma$. Bila $\sigma= \tau+1$ maka $\upsilon = \omega\tau+\omega$. Menurut hipotesis induksi $W(\omega\tau) = {}^2Log\ (g(\omega\tau,\omega))$. Maka

$$W(\omega\tau+1) = 2\hat{}\,{}^2Log\ (g(\omega\tau,\omega)) = g(\omega\tau,\omega),\ W(\omega\tau+2) = g(\omega\tau+1, \omega)$$

dan seterusnya. Secara umum $W(\omega\tau+n+1) = g(\omega\tau+n, \omega)$. Jadi

$$\begin{aligned} W(\omega\tau+\omega) &= (\lambda n)W(\omega\tau+n) = (\lambda n)g(\omega\tau+n-1, \omega) = (\lambda n)\,{}^2Log\ (g(\omega\tau+n,\omega)) \\ &= {}^2Log\ (g(\omega\tau+\omega,\omega)) = {}^2Log\ (g(\upsilon,\omega)). \end{aligned}$$

Bila σ ordinal limit, maka menurut hipotesis induksi $W(\sigma n) = {}^2Log\ (g(\sigma n,\omega))$ untuk semua bilangan cacah n. Maka

$$\begin{aligned} W(\sigma\omega) &= (\lambda n)W(\sigma n) = (\lambda n)\,{}^2Log\ (g(\sigma n,\omega)) = {}^2Log\ (g((\lambda n)\sigma n,\omega)) \\ &= {}^2Log\ (g(\sigma\omega,\omega)) = {}^2Log\ (g(\upsilon,\omega)) \end{aligned}$$

Selesai.

Contoh.

Berikut ini akan diperlihatkan konstruksi beberapa orca yang benar-benar "raksasa".

(1) $W(\omega) = W(1,2,3,\ldots) = (2\hat{}1,2\hat{}2\hat{}2,2\hat{}2\hat{}2\hat{}3,2\hat{}2\hat{}2\hat{}2\hat{}4,\ldots)$.

(2) $W(\omega+1) = 2^{W(\omega)} = (1,4, 2(8^5),\ldots)$.

(3) Misalkan $h = W\circ\Phi^{-1}$ maka $h(W(\omega)) = W(\Phi^{-1}(W(\omega))) = (W\circ\Phi^{-1})((\lambda n)W(n)(n))$
$= (W\circ\Phi^{-1})((\lambda n)g(n,\omega)(n)) = (\lambda n)\ (W\circ\Phi^{-1})(\ g(n,\omega)(n)) = (\lambda n)\ (W(\Phi^{-1}(g(n,\omega)(n))$
$= (\lambda n)W(n)(n) = (w(1),(2\hat{}w)(2),(2\hat{}(2\hat{}\omega))(3),\ldots) = (1,4,2\hat{}8,2\hat{}2\hat{}16,\ldots)$.

(4) Misalkan h adalah fungsi yang didefinisikan pada butir (3) dan $h^{n+1} = h\circ h^n$. Maka
$h^{\omega}(W(\omega)) = (\lambda n)\ h^n(W(n))(n) = (h(W(1))(1),h^2W(2)(2),h^3W(3)(3),\ldots) =$
$(h(2^w)(1),h^2(2\hat{}2\hat{}2)(2),h^3(2\hat{}2\hat{}2\hat{}3)(3),\ldots) =$
$(W(2\hat{}2)(1),hW(2\hat{}2\hat{}2)(2),h^2W(2\hat{}2\hat{}2\hat{}3)(3),\ldots)$.
Bila dihitung $W(2\hat{}2)(1) = 2\hat{}2\hat{}2 = 2^4 = 16$. Sedangkan $hW(2\hat{}2\hat{}2)(2) = 2\hat{}2\hat{}\ldots\hat{}2$ di mana banyak pangkat ada $(2\hat{}2\hat{}2)+3$ buah. Dengan cara serupa $h^2W(2\hat{}2\hat{}2\hat{}3) = 2\hat{}2\hat{}\ldots\hat{}2\hat{}3$ dengan banyak 2 yang terlibat pemangkatan ada $(2\hat{}2\hat{}2)+3$ buah.

Di bawah ini dikemukakan beberapa fakta tentang korespondensi orca-orca dengan ordinal-ordinal yang mempertahankan beberapa konsep.

Teorema B.8.
Dengan mengasumsikan hipotesis kontinum, berlaku $\omega_\alpha' = W(\alpha)$.
Bukti.
Hipotesis kontinum menyebabkan $\omega_{\alpha+1} = 2\text{^}\omega_\alpha$ untuk sembarang α, serta $\omega_\alpha = Lim_{\gamma\to\alpha}\, 2^\gamma$ bila α ordinal limit. Sekarang teorema akan dibuktikan dengan induksi transfinit terhadap α.
Pertama, untuk α=0, $\omega_0 = \omega$ dan W(0) = w. Sedangkan ω' = w. Jadi $\omega_0' = W(0)$.
Kedua, andaikan teorema berlaku untuk $\alpha=\beta$. Misalkan β' = b. Mengingat $\omega_{\beta+1} = 2\text{^}\omega_\beta$ maka $\omega_{\beta+1}' = (2\text{^}\omega_\beta)' = 2\text{^}(\omega_\beta)' = 2^{W(\beta)'} = W(\beta+1)$. Jadi teorema berlaku pula untuk $\alpha = \beta+1$.
Ketiga, andaikan teorema berlaku untuk sembarang $\beta<\alpha$ sedangkan α ordinal limit. Maka $\alpha = \omega\gamma$ untuk suatu ordinal γ. Mengingat $\omega_{\omega\gamma} = \square_{n=1}^{\infty}\omega_{n\gamma}$ serta untuk setiap n berlaku $\omega_{n\gamma}' = W(n\gamma)$, haruslah $\omega_\alpha' = sup_{n<\omega}\, \omega_{n\gamma}' = sup_{n<\omega}\, W(n\gamma) = W(\alpha)$. Jadi teorema berlaku pula untuk α.
Menurut induksi transfinit, haruslah teorema berlaku untuk sembarang ordinal α. *Selesai*.

Teorema B.9. Korespondensi Hirarki Zermelo.
Dengan mengasumsikan hipotesis kontinum, Φ membentuk korepondensi satu-satu antara hirarki Zermelo tingkat α untuk ordinal dengan hirarki Zermelo tingkat α untuk orca.

Bukti.
Banyaknya orca dari $W(\alpha)$ sampai $W(\alpha+1)$ sama banyak dengan prapetanya oleh Φ, yaitu ordinal-ordinal dari ω_α sampai $\omega_{\alpha+1}$. Oleh karena itu Φ membentuk pemetaan bijektif dari tingkat ordinal menurut hirarki Zermelo $F(\alpha)$ ke $\varsigma(\alpha)$. *Selesai*.

Teorema B.10.
Dengan mengasumsikan hipotesis kontinum, Φ memetakan secara bijektif kardinal-kardinal tak hingga ke orca-orca pembuka.

Bukti. Hipotesis kontinum menyatakan bahwa kardinal tak hingga ke α adalah ω_α. Sedangkan untuk setiap α, $\omega_\alpha' = W(\alpha)$. Jadi jelas teorema berlaku. *Selesai*.

Definisi B.4. Sebuah orca pembuka v dikatakan *teratur* bila ia tidak dapat dinyatakan sebagai nilai polinom p(x) berkoefisen orca tingkat yang lebih rendah dari tingkat v untuk x sebuah orca tingkat yang lebih rendah dari v pula. Secara ekuivalen v dikatakan teratur bila $v = \upsilon'$ untuk suatu ordinal teratur υ.

Contoh.
w adalah sebuah orca teratur, namun $W(\alpha)$ untuk $\alpha>0$ yang sejauh ini dibahas tidaklah teratur.
Berikut ini adalah sebuah konsep yang sejauh ini belum dimungkinkan.

Definisi B.5.
Sebuah orca pembuka v dikatakan *tak terjangkau* bila ia teratur dan untuk setiap u<v, $2^u < v$. Secara ekuivalen v orca tak terjangkau bila $v = \upsilon'$ untuk suatu kardinal tak terjangkau υ.
Bila aksioma kardinal tak terjangkau diberlakukan maka pembuka-pembuka tak terjangkau selain w bermunculan.

Teorema B.11.
Dengan mengasumsikan aksioma kardinal tak terjangkau, untuk setiap orca v, terdapat pembuka u tak terjangkau yang lebih besar dari v.

Bukti.
Teorema ini merupakan terjemahan langsung dari aksioma kardinal tak terjangkau oleh Φ. *Selesai*.
Dengan adanya aksioma pembuka tak terjangkau, maka ada sesuatu yang dapat ditambahkan pada Φ, yaitu teorema berikut ini.

Teorema B.12.
Korespondensi Kardinal-kardinal Tak Terjangkau.
Setiap kardinal himpunan yang tak terjangkau berkorespondensi satu-satu dengan orca pembuka yang tak terjangkau pula secara mempertahankan urutan melalui Φ.

Bukti.
Andaikan Φ memetakan suatu kardinal tak terjangkau μ ke orca pembuka yang *tidak* tak terjangkau u, maka ada polinom formal p yang bersifat p(w) = u namun parameter-parameter p berasal dari ordinal-ordinal tingkat yang lebih rendah dari u. Polinom formal p* yang diperoleh dengan mengganti setiap parameter a dari p dengan a' mendefinisikan deret polinom untuk memperoleh μ sebagai p*(ω). Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa μ tak terjangkau.
Argumen serupa memperlihatkan bahwa tidak mungkin pula kardinal yang *tidak* tak terjangkau dipetakan Φ ke suatu pembuka tak terjangkau. *Selesai*.

3. Orca-orca Bulat, Pecahan, dan Real

Definisi C.1.
Sebuah barisan disebut *orca bulat* bila ia dapat dinyatakan sebagai selisih barisan dari dua orca. Kelas semua orca bulat ditulis *OrcaBulat*.

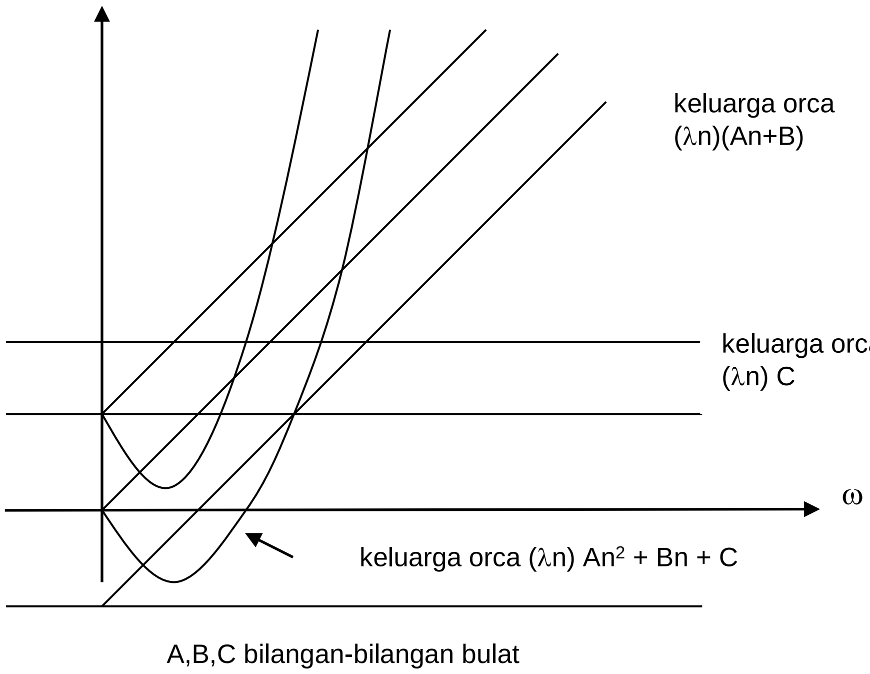
Contoh:
(1) $3° = 3°-0°$ adalah orca bulat.
(2) $-2° = 5°-7°$ juga orca bulat.
(3) $w = (w+1°)-1°$ adalah orca bulat.
(4) $w-1°, w-2°, \ldots$ adalah tak hingga buah orca bulat yang lebih kecil dari w namun lebih besar dari semua bilangan asli.
(5) $(\lambda n)p(n)$ di mana p(n) adalah polinom dari n berkoefisien bilangan cacah adalah orca bulat. Dalam hal ini $(\lambda n)p(n) = p(w)$.

Teorema C.1.
Sebuah orca bulat adalah barisan bilangan bulat.

Bukti.
Misalkan $s = (\lambda n)s(n)$ dan $t = (\lambda n)t(n)$ dua orca. Maka $s-t = (\lambda n)[s(n)-t(n)]$.
Mengingat t(n) dan t(n) sama-sama bilangan cacah, maka s(n)-t(n) bulat untuk sembarang n. *Selesai*.

Teorema C.2.
Hirarki ς' untuk Orca Bulat.
Misalkan $\varsigma':Ord \to \wp(OrcaBulat)$ di mana $\varsigma'(\gamma)$ didefinisikan sebagai himpunan semua orca bulat c berbentuk a-b dengan $a \in Z(\alpha)$, $b \in Z(\beta)$ dengan $\gamma = \alpha \oplus \beta$, di mana untuk semua orca x, x+a dan x+b masing-masing memiliki tingkat tidak melebihi α dan β. Maka ς' merupakan sebuah hirarki untuk *OrcaBulat*.
Bukti.

Akan dibuktikan bahwa setiap orca bulat terletak pada $\varsigma'(\alpha)$ untuk suatu α. Jelas bahwa wakil-wakil bilangan bulat terletak di dalam $\varsigma'(0)$. Sekarang misalkan s adalah sebuah orca bulat sembarang. Maka s = u-v untuk orca-orca tertentu u dan v. Misalkan x adalah orca di mana x+u maupun x+v memiliki tingkat terkecil. Misalkan tingkat x+u dan x+v masing-masing adalah α dan β. Maka s = u-v = (x+u)-(x+v) bertingkat $\gamma = \alpha\oplus\beta$. Jadi s terletak di $\varsigma'(\gamma)$. *Selesai*.



Gambar C.1. Beberapa orca bulat

Definisi C.1.
Sebuah ordinal α dikatakan merupakan *tingkat* dari orca bulat c bila $c \in \varsigma'(\alpha)$ namun $c \notin \varsigma'(\beta)$ untuk semua $\beta<\alpha$. Himpunan semua orca bulat bertingkat α ditulis $Z'(\alpha)$.

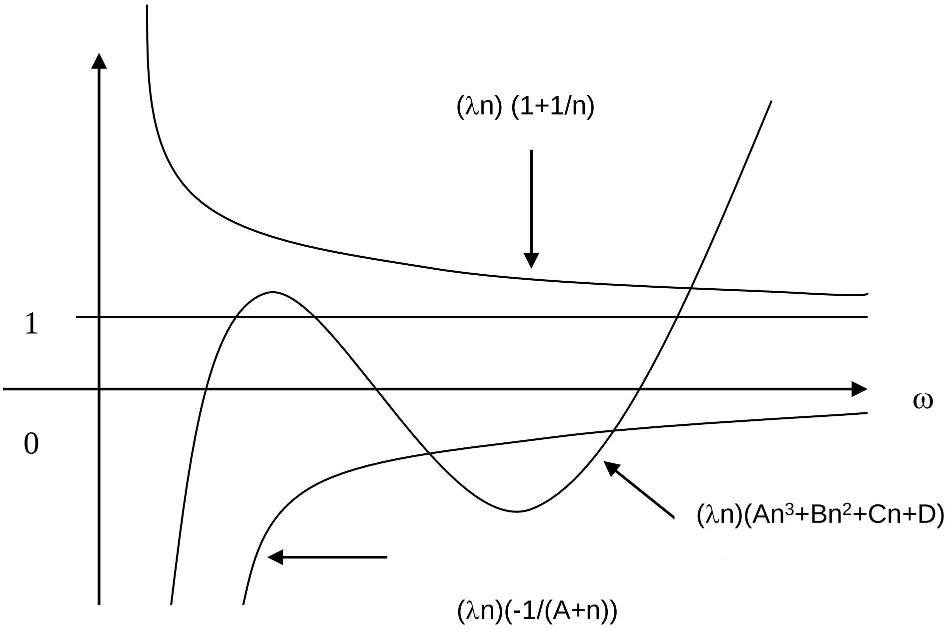
Teorema C.3.
Misalkan u orca bulat. Maka u terdefinisi oleh polinom formal berkoefisien orca bulat masing-masing dengan tingkat yang lebih rendah dari tingkat u.

Bukti.
Misalkan u = s-t dengan tingkat s adalah σ dan tingkat t adalah τ di mana tingkat u adalah $\sigma\oplus\tau$. Misalkan s = p(w) dan t = q(w). Maka u = r(w) di mana r(x) = p(x)-q(x). Koefisien-koefisien r merupakan selisih-selisih koefisien p dengan koefisien q yang masing-masing tingkatnya lebih rendah dari tingkat-tingkat s dan t. Jadi koefisien-koefisien r adalah orca bulat yang tingkatnya lebih rendah dari tingkat u. *Selesai*.

Definisi C.2.
Sebuah barisan disebut *orca pecahan* bila dapat dinyatakan sebagai hasil bagi suatu orca bulat dengan suatu orca bulat selama hasilnya hanya memiliki hingga buah suku tak terdefinisi. Kelas semua orca pecahan ditulis *OrcaPecahan*.

Contoh.
(1) $1°/(w-3°) = (\lambda n)[1/(n-3)]$ adalah orca pecahan positif yang jaraknya ke nol tak hingga kecil.

(2) $w/(w\text{-}2^\circ) = (\lambda n)[n/(n\text{-}2)]$ adalah juga orca pecahan yang lebih kecil dari satu dan jaraknya ke satu tak hingga kecil.
(3) $2^w/w$ = (2,2,(2,666...),4,(7,4),□) sebuah orca pecahan positif tak hingga.
(4) $1^\circ/0^\circ$ dan $0^\circ/0^\circ$ bukan ordinal pecahan sebab ada tak hingga buah suku tak terdefinisi.



Gambar C.2. Beberapa orca pecahan

Teorema C.4.
Sebuah orca pecahan adalah barisan bilangan pecahan pada suku-sukunya yang terdefinisi.

Bukti.
Misalkan $s = (\lambda n)s(n)$ dan $t = (\lambda n)t(n)$ dua orca bulat. Maka $s/t = (\lambda n)s(n)/t(n)$.
Bila $t(n)\neq 0$, mengingat $s(n)$ dan $t(n)$ sama-sama bulat, maka $s(n)/t(n)$ pecahan. *Selesai*.

Teorema C.5. Hirarki ς" untuk Orca Pecahan.
Misalkan ς'':*Ord*$\rightarrow\wp$(*OrcaPecahan*) di mana $\varsigma''(\gamma)$ didefinisikan sebagai himpunan semua orca pecahan c berbentuk a/b dengan $a \in Z'(\alpha)$, $b \in Z'(\beta)$ dengan $\gamma = \alpha\oplus\beta$, di mana untuk semua orca bulat tak nol x, xa dan xb masing-masing memiliki tingkat tidak melebihi α dan β.
Maka ς" merupakan sebuah hirarki untuk *OrcaPecahan.*.

Bukti.
Akan dibuktikan bahwa setiap orca pecahan terletak pada $\varsigma''(\alpha)$ untuk suatu α.
Misalkan s adalah sebuah orca pecahan sembarang. Maka s = u/v untuk orca-orca bulat tertentu u dan v. Misalkan x adalah orca bulat di mana xu maupun xv memiliki tingkat terkecil. Misalkan tingkat xu dan xv masing-masing adalah α dan β. Maka s = u/v = (xu)/(xv) bertingkat $\gamma = \alpha\oplus\beta$.
Jadi s terletak di $\varsigma''(\gamma)$. *Selesai*.

Definisi C.3.
Sebuah ordinal α dikatakan merupakan *tingkat* dari orca pecahan c bila $c \in \varsigma''(\alpha)$ namun $c \notin \varsigma''(\beta)$ untuk semua $\beta<\alpha$. Himpunan semua orca pecahan bertingkat α ditulis $Z''(\alpha)$.

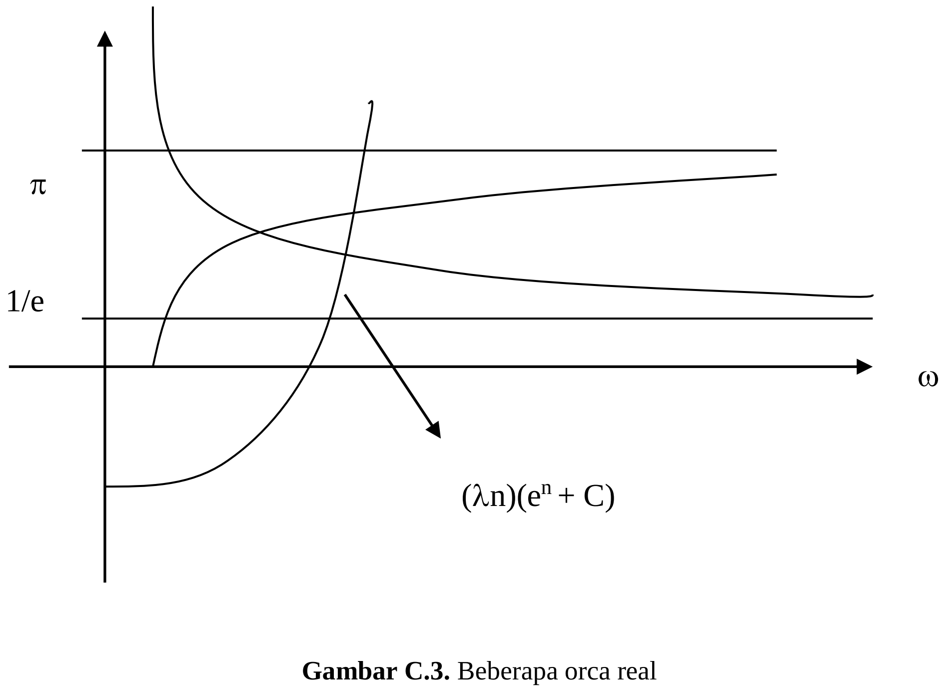
Definisi C.4.
Misalkan H sebuah himpunan. *Fungsi pecahan formal* atas H adalah tulisan berbentuk f/g dimana f dan g adalah polinom-polinom formal atas H.

Teorema C.6. Misalkan u orca bulat. Maka u terdefinisi oleh fungsi pecahan polinom formal berkoefisien orca pecahan masing-masing dengan tingkat yang lebih rendah tingkat u, serta pangkat-pangkatnya adalah orca bulat yang masing-masing tingkatnya juga lebih rendah dari tingkat u.

Bukti.
Misalkan u = s/t dengan tingkat s adalah σ dan tingkat t adalah τ di mana tingkat u adalah $\sigma\oplus\tau$. Misalkan s = p(w) dan t = q(w). Maka u = r(w) di mana r(x) = p(x)/q(x). Bila dilakukan pembagian polinom akan terungkap bahwa bagian polinom r memiliki koefisien-koefisien yang merupakan hasil-hasil bagi dari koefisien p dengan koefisien q yang masing-masing tingkatnya lebih rendah dari tingkat-tingkat s dan t. Jadi koefisien-koefisien bagian polinom r adalah orca bulat yang tingkatnya lebih rendah dari tingkat u. Pangkat bagian polinom merupakan selisih-selisih dari pangkat-pangkat s dan t. Jadi tingkat pangkat-pangkat tersebut lebih rendah dari tingkat s maupun t. Adapun bagian fungsi pecahan dari r tetap memiliki parameter asal s atau t. Jadi semua parameter r tingkatnya lebih rendah dari tingkat u. *Selesai*.

Definisi C.5.
Untuk sembarang barisan real T didefinisikan norm $\langle T\rangle = (\lambda n)\mathit{sup}\{|T(1)|,...,|T(n)|\}$.
Misalkan $G(n) = (\lambda p)H(n)(p)$.

Definisi C.6.
Misalkan $s = (\lambda n)h(n)$ barisan orca-orca pecahan. s dikatakan *orca real* apabila s merupakan barisan Cauchy dalam norm "$\langle\ \rangle$".



Gambar C.3. Beberapa orca real

Lemma C.7.
Misalkan $s = (\lambda n)h(n)$ sebuah orca real di mana $h(n) = (\lambda p)h(n)(p)$.
Maka untuk setiap p, $(\lambda n)h(n)(p)$ konvergen seragam ke suatu bilangan real.

Bukti.

Misalkan s orca real di atas. Maka (λn)h(n) adalah barisan Cauchy menurut norm 〈〉. Dengan demikian barisan tersebut konvergen ke suatu barisan g. Meninjau definisi norm 〈〉 terlihat bahwa (λn)h(n) konvergen seragam ke g. Mengingat tiap suku g merupakan limit dari barisan bilangan-bilangan pecahan, haruslah suku itu berupa bilangan real. *Selesai*.

Teorema C.8. Hirarki ς''' untuk Orca Real.

Misalkan ς''':*Ord*→℘(*OrcaReal*) di mana ς'''(γ) didefinisikan sebagai himpunan semua orca real c berbentuk barisan orca pecahan $(c_1, c_2, c_3, ...)$ dengan $\gamma = \square_{n=1}^{\infty} \square_{k=n}^{\infty} \tau_k$ (yang disebut *limit infimum* dari $(\lambda k)\tau_k$) di mana τ_k adalah tingkat dari c_k untuk sembarang k. Maka ς''' merupakan sebuah hirarki untuk *OrcaReal*.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa setiap orca real terletak pada ς'''(α) untuk suatu α. Misalkan s adalah sebuah orca real sembarang. Maka $s = (s_1, s_2, s_3, ...)$ untuk orca-orca pecahan tertentu $s_1, s_2, s_3, ...$ Misalkan $\gamma = \square_{n=1}^{\infty} \square_{k=n}^{\infty} \tau_k$ di mana τ_k adalah tingkat dari c_k untuk sembarang k. Jadi s terletak di ς'''(γ). *Selesai*.

Definisi C.7.

Sebuah ordinal α dikatakan merupakan *tingkat* dari orca real c bila c ∈ ς'''(α) namun c ∉ ς'''(β) untuk semua β<α. Himpunan semua orca real bertingkat α ditulis Z'''(α).

Definisi C.8.

A. Misalkan H sebuah himpunan. *Deret pangkat formal berparameter* H adalah tulisan berbentuk $p(x) = A_0 + A_n x^{B(n)} + A_n x^{B(n)} + \square = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{B(n)}$ di mana $A_0, A_1, A_3, ... B(1), B(2), B(3), ...$ adalah anggota-anggota H dengan B(i)≠B(j) untuk i≠j. A_i disebut *koefisien* dari $x^{B(i)}$.
B. Misalkan H sebuah himpunan. *Deret pangkat pecahan formal berparameter* H adalah tulisan berbentuk p(x)/q(x) di mana p(x) dan q(x) adalah deret-deret pangkat formal berparameter H.

Teorema C.9.

Misalkan r = (λn)r(n) orca real, maka r = g(w) untuk suatu deret pangkat pecahan formal f berparameter orca-orca real yang masing-masing tingkatnya tidak lebih besar dari tingkat r.

Bukti.

Misalkan r = (λn)r(n) sebuah orca real. Misalkan untuk setiap n, $r(n) = (\lambda k)f_n(k) = f_n(w)$ di mana f_n adalah fungsi pecahan formal. Maka (λn)fn adalah barisan fungsi yang konvergen seragam di titik-titik x = bilangan asli. Mengingat f_n berbentuk $p_n(x)/q_n(x)$ untuk setiap n, di mana $p_n(x)$ dan $q_n(x)$ adalah polinom-polinom formal berkoefisien bulat, $(\lambda n)f_n$ konvergen ke suatu fungsi f berbentuk f(x) = p(x)/q(x) di mana p(x) merupakan limit dari $(\lambda n)p_n(x)$ dan q(x) merupakan limit dari $(\lambda n)q_n(x)$. Oleh karena itu p(x) maupun q(x) berbentuk deret pangkat formal berkoefisien bulat. Jadi f adalah sebuah deret pangkat pecahan formal. Masing-masing koefisien dari f berasal dari koefisien p_n dan q_n untuk n cukup besar. Jadi koefisien-koefisien ini memiliki tingkat yang lebih rendah dari tingkat r(n) untuk n cukup besar. Oleh karena itu limit infimum dari tingkat-tingkat masing-masing koefisien ini lebihi rendah dari tingkat r. *Selesai*.

Definisi C.9.

Sebuah orca real s = (λn)h(n) dengan h(n) = (λk)g(n,k) dikatakan sebuah *bilangan real* bila barisan diagonalnya h(n) = (λn)g(n,n) merupakan barisan Cauchy.

Teorema C.10. Sebuah bilangan real adalah suatu orca real s = (λn)h(n) yang konvergen ke barisan bilangan real (λn)g(n) yang pada gilirannya konvergen ke suatu bilangan real G.

Bukti.

Misalkan s = (λn)h(n) sebuah bilangan real dengan h(n) = (λk)g(n,k). Misalkan (λk)g(n,k) konvergen seragam ke g(n). Karena (λn)g(n,n) merupakan barisan Cauchy maka ia konvergen ke suatu bilangan real G. Misalkan ε/2 > 0 dan N adalah bilangan asli yang bersifat |g(m,m)-

$|G| < \varepsilon/2$ untuk m>N serta K adalah bilangan asli yang bersifat $|g(m,p)-g(m)| < \varepsilon/2$ untuk p>K. Maka untuk $m = p > maks\{N,K\}$, $|g(m)-G| = |g(m)-g(m,m)+g(m,m)-G| \leq |g(m)-g(m,m)| + |g(m,m)-G| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Dengan demikian $(\lambda n)g(n)$ konvergen ke G. *Selesai*.

4. Kesimpulan

Pelenyapan sifat menyerap dari operasi-operasi ordinal agar lebih layak dipandang sebagai perluasan dari operasi aritmetika biasa dapat dilakukan dengan operasi perluasan atas orca-orca. Secara teknis yang disorot adalah korespondensi Φ antara sistem ordinal dengan sistem orca. Bertolak dari barisan-barisan konstan sebagai wakil bilangan cacah, dengan merumuskan "penjumlahan dengan satu" dan "penjumlahan tak hingga kali" atas barisan diperoleh sistem orca dengan segala operasinya yang ternyata bertepatan dengan operasi-operasi terkait atas bilangan-bilangan cacah yang dilakukan per suku pada barisan. Lebih dari itu, didapat pula korespondensi satu-satu Φ antara ordinal-ordinal dengan orca-orca yang mempertahankan urutan. Korespondensi alami ini memang tidak merupakan homomorfisma penjumlahan namun kemudian didapat hubungan-hubungan yang saling mengisi.

Hirarki Zermelo ordinal ditafsirkan dalam istilah polinom dengan pembatasan parameter. Φ juga merupakan korespondensi satu-satu dari ordinal-ordinal limit ke orca-orca limit serta (kalau dianggap ada) korespondensi satu-satu dari kardinal-kardinal tak terjangkau ke pembuka-pembuka tak terjangkau.

Orca secara komputasi lebih mudah dari ordinal. Dengan demikian mudah pula pengembangan ordinal ini ke sistem-sistem ordinal bulat, pecahan, dan real. Orca, orca bulat, orca pecahan, dan orca real hanya dibedakan secara hirarkis dari rumus-rumus pendefinisinya semata, yaitu polinom berparameter cacah, polinom berkoefisien bulat dengan pangkat cacah, fungsi pecahan berkoefisien pecahan dengan pangkat bulat, atau deret pangkat pecahan berkoefisien real berpangkat bulat. Hirarki-hirarki yang timbul masing-masing disebut hirarki-hirarki ς, ς', ς'', dan ς'''.

5. Saran

Dengan adanya bilangan-bilangan real tak hingga besar *(infinit)* maupun tak hingga kecil *(infinitesimal)* sistem ordinal real ini berguna pula untuk mengembangkan bidang analisis real atau mempelajarinya dengan membuang konsep limit fungsi yang biasa disebut sebagai *analisis tak baku (non standard analysis)*. [5] membahas analisis tak baku tanpa secara khusus menggunakan orca real yang dirasakan terlalu "eksak" untuk aplikasi ketakhinggaan, sebab dalam aplikasi bilangan tak hingga memang tidak perlu diketahui secara persis. Dengan demikian praktis belum didalami bagaimana "wajah" analisis bila yang digunakan adalah orca real.

Dengan adanya hirarki Zermelo, pemaparan sistem-sistem ordinal ini tidak perlu mengikuti yang ditulis pada tulisan ini. Boleh saja mendefinisikan ordinal tingkat satu sebagai barisan yang didefinisikan deret pangkat dengan parameter cacah, misalnya. Bahkan boleh juga alih-alih barisan, fungsi real digunakan sebagai alternatif. Pembicaraan ke arah ini boleh jadi merupakan awal dari pengembangan konsep-konsep ini ke bidang-bidang matematika yang lebih abstrak.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, Robert G. (1976). *Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[2] Devlin, Keith. (1996). *The Joy of Sets*, Springer Verlag, New York.

[3] Enderton, Herbert D. (1977). *Elementary Set Theory*, Academic Press, Orlando, Florida.

[4] Garwati, Eka Triyani. (2006). *Penyederhanaan Informasi Matriks Umum menggunakan Sifat-sifat Aljabar Matriks*, Skripsi Jurusan Matematika Universitas Islam Bandung, Bandung.

[5] Kurnia, Dede Budi (2006). *Teorema-teorema Dasar Kalkulus dalam Analisis Tak Baku menggunakan Ordinal Real*, Skripsi Jurusan Matematika Universitas Islam Bandung, Bandung.

[6] Norawati. (2006). *Pengembangan Konsep Ordinal barisan Cacah dari Ordinal von Neumann*, Skripsi untuk diajukan pada sidang sarjana Universitas Islam Bandung, Bandung.
[7] Salim, Ravi Ahmad & Ernastuti. (2006). *Mengatasi Sifat Menyerap Penjumlahan Ordinal dengan Ordinal Barisan Cacah*, Universitas Gunadarma, Jakarta.
[8] Salim, Ravi Ahmad & Erwin Harahap & Norawati (2006)., *Hirarki Polinom untuk Ordinal Barisan Cacah serta Pengambangannya*, Jurusan Matematika, Universitras Islam Bandung, Bandung.