Jurnal Matematika Vol.6 No.1
November 2006 [ 85 : 91 ]

# GRAPHICAL REGULAR REPRESENTATION (GRR)

Elyas Kustiawan

*Jurusan Matematika, UNISBA, Jalan Tamansari No 1, Bandung,40116, Indonesia*
*elyaskustiawan@yahoo.com*

**Abstrak** Misalkan $\Gamma$ adalah graf transitif titik dimana grup automorfisma G = *Aut*($\Gamma$) adalah abelian. Suatu grup abstrak hingga G memenuhi *graphical regular representation* ***(GRR)***, jika ada graf $\Gamma$ sedemikian sehingga G isomorfik dengan *Aut*($\Gamma$), dan *Aut*($\Gamma$) *beraksi regular* pada V$\Gamma$. Akibatnya, G beraksi regular pada V$\Gamma$, dan G adalah suatu 2-grup abelian.

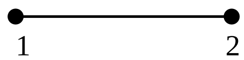
*Kata kunci:* graf, regular, automorfisma, abelian.

## 1. Pendahuluan

Misalkan grup berhingga G = $Z_2$ adalah modulo 2, maka dengan operasi penjumlahan ‘ + ‘ diperoleh :

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Selanjutnya, misalkan graf $\Gamma$ adalah graf lengkap $K_2$ (atau graf $\Gamma = K_2$) yaitu;




maka diperoleh *Aut*($\Gamma$) = { $\pi_1$ , $\pi_2$ } dengan $\pi_1$ = 1 (identitas) dan $\pi_2$ = (12).

Tabel dengan operasi komposisi ‘ o’ dari unsur *Aut* ($\Gamma$) adalah sebagai berikut:

| o | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
|---|---|---|
| $\pi_1$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
| $\pi_2$ | $\pi_2$ | $\pi_1$ |

.

Jadi terdapat suatu pemetaan $\Psi : G \longrightarrow$ *Aut*( $\Gamma$ ) yang bersifat bijektif, dengan pengaitan :

$$0 \longmapsto \pi_1$$
$$1 \longmapsto \pi_2 .$$

sehingga dapat dikatakan bahwa grup berhingga G isomorfik dengan *Aut* ($\Gamma$) dan *Aut*($\Gamma$) *beraksi regular* pada V$\Gamma$.

## 2. Graphical Regular Representation (GRR)

**Definisi 1.**

Suatu grup abstrak hingga G memenuhi graphical regular representation (**GRR**), jika ada graf $\Gamma$ sedemikian sehingga G isomorfik dengan *Aut*($\Gamma$ ), dan *Aut*($\Gamma$ ) beraksi regular pada V$\Gamma$.

Berdasarkan penjelasan pada bagian pendahuluan dapat dikatakan bahwa graf $\Gamma = K_2$ merupakan *graphical regular representation (**GRR**)*.Jadi dapat dikatakan bahwa,suatu grup G tidak mempunyai GRR *jika dan hanya jika* setiap himpunan pembangun $\Omega$ untuk G sedemikian sehingga terdapat suatu automorfisma G yang mem-*fix*-kan $\Omega$ *setwise*. Sebagai contoh dari ide tersebut dapat ditunjukkan bahwa grup $S_3$ bukan representasi graf regular (GRR)..

**Contoh 1.**

Misalkan G adalah grup simetri $S_3$ yaitu permutasi unsur {1,2,3}, maka
G = { 1, (12), (13), (23), (123), (132) }={$\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$, $\pi_5$, $\pi_6$} secara berurutan. Diperoleh tabel dengan operasi komposisi ‘ o’ dari unsur G adalah sebagai berikut:

| $\circ$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_1$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ |
| $\pi_2$ | $\pi_2$ | $\pi_1$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ |
| $\pi_3$ | $\pi_3$ | $\pi_6$ | $\pi_1$ | $\pi_5$ | $\pi_4$ | $\pi_2$ |
| $\pi_4$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ |
| $\pi_5$ | $\pi_5$ | $\pi_4$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_6$ | $\pi_1$ |
| $\pi_6$ | $\pi_6$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $\pi_2$ | $\pi_1$ | $\pi_5$ |

Selanjutnya misalkan $\Omega$ ={$\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$ } adalah himpunan pembangun untuk G. Jelas $\Omega$ memenuhi sifat :

(i). $\pi_2^{-1} \in \Omega$ , $\pi_3^{-1} \in \Omega$ dan $\pi_4^{-1} \in \Omega$, artinya $\forall\ x \in \Omega \Rightarrow x^{-1} \in \Omega$

(ii). $\pi_1 \notin \Omega$

Dari grup berhingga G dengan himpunan pembangun $\Omega$ diatas, diperoleh *graf Cayley* $\Gamma = \Gamma$ (G, $\Omega$ ) yang isomorfik dengan $K_{3,3}$ .

Karena terdapat automorfisma $\pi_5$ , $\pi_6$ $\in$ G sehingga berlaku $\pi_5$ ($\Omega$ )=$\Omega$ dan $\pi_6$ ($\Omega$ )=$\Omega$ , maka dapat disimpulkan grup G tidak mempunyai *graphical regular representation (**GRR**).*

## 3. Hasil Utama

**Proposisi 1.**

Misalkan $\Gamma$ adalah graf transitif titik dimana grup automorfisma G = *Aut*($\Gamma$) adalah abelian. Maka G beraksi regular pada $V\Gamma$, dan G adalah suatu 2-group abelian.

**Bukti:**

Pertama-tama akan ditunjukkan G beraksi regular pada $V\Gamma$. Misalkan $\Gamma$ graf transitif titik dengan G = *Aut*($\Gamma$) abelian. Misalkan $g,h \in G$ dengan g mem-*fix*-kan v maka berlaku gh(v) = hg(v) = h(v). Akibatnya g juga mem-*fix*-kan h(v). Karena G transitif maka setiap titik adalah hasil dari h(v) untuk suatu $h \in G$. Jadi g yang mem-*fix*-kan setiap titik adalah g = i. Jadi G beraksi regular pada $V\Gamma$. Selanjutnya akan ditunjukkan G adalah suatu 2-group abelian. Karena G = Aut($\Gamma$) aksi regular pada $V\Gamma$ maka $\Gamma$ adalah graf Cayley $\Gamma(G, \Omega)$. Karena G abelian, fungsi f dengan pengaitan $g \alpha g^{-1}$ merupakan suatu automorfisma dari G dan mem-*fix*-kan $\Omega$. Perhatikan isomorfisma grup berikut,

$$f : G \rightarrow G$$

dengan pengaitan, $$g \alpha g^{-1}.$$

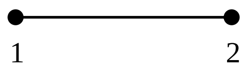
Ambil $g,h \in G$ maka $f(g) = g^{-1}$ dan $f(h) = h^{-1}$
Sehingga dari sifat grup berlaku,

$$f(g \bullet h) = f(g) \bullet f(h)$$
$$(gh)^{-1} = g^{-1} h^{-1}$$
$$h^{-1} g^{-1} = g^{-1} h^{-1}$$
$$g^{-1} h^{-1} = g^{-1} h^{-1} \text{ karena G abelian}$$

Jika $g \neq g^{-1}$ ini merupakan Automorfisma yang non-trivial, mengakibatkan G tidak regular.
Jadi haruslah $g = g^{-1}$ $\forall g \in G$ dan selanjutnya karena berlaku $g^2 = g\, g = g\, g^{-1} = i$ untuk setiap unsur di G maka G mempunyai order 2 dengan G abelian (atau ditulis G adalah suatu 2-grup abelian). Jadi terbukti proposisi 1.

**Contoh 2.**

Misalkan graf $\Gamma$ adalah graf komplit $K_2$ (atau graf $\Gamma = K_2$) yaitu;




maka diperoleh *Aut*($\Gamma$) = $\{\pi_1, \pi_2\}$ dengan $\pi_1$ = 1 (identitas) dan $\pi_2$ = (12). Jelas terlihat bahwa graf $\Gamma$ bersifat transitif titik.

Tabel dengan operasi komposisi ' o' dari unsur *Aut* ($\Gamma$) adalah sebagai berikut:

| o | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
|---|---|---|
| $\pi_1$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
| $\pi_2$ | $\pi_2$ | $\pi_1$ |

Dari tabel terlihat bahwa G = Aut(Γ) = {$\pi_1$, $\pi_2$} bersifat abelian dan | Aut(Γ) | = | VΓ | = 2. Karena setiap stabilizer dari titik 1 dan 2 hanya $\pi_1$ (= identitas) dan karena $\pi_2$ unsur dari G tidak mem-*fix*-kan sembarang titik maka dikatakan G beraksi regular pada VΓ.

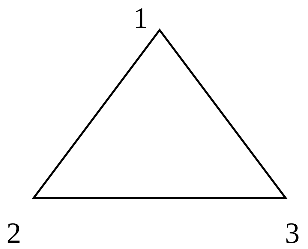
Karena $\forall \pi_i \in$ Aut(Γ) berlaku O($\pi_i$) = 2 yaitu $\pi_i^2 = \pi_i\, \pi_i = i$ untuk setiap *i =1,2* , sehingga bilangan bulat terkecil dari pangkatnya yang mengakibatkan sama dengan identitas adalah 2 maka G adalah 2-grup abelian.

Jadi terbukti G beraksi regular pada VΓ, dan G adalah suatu 2-group abelian.

Berikut ini akan diberikan penjelasan dari jika semua nilai eigen dari suatu graf merupakan *nilai eigen sederhana* maka setiap automorfismanya, *selain* permutasi identitas mempunyai order 2.

**Contoh 3.**

Kemungkinan Graf Γ dengan 3 titik yang bersifat *transitif-titik* adalah sebagai berikut:




Polinomial P($\lambda$)= $-(\lambda-2)\,(\lambda+1)^2$ , tidak semua nilai eigenya sederhana.

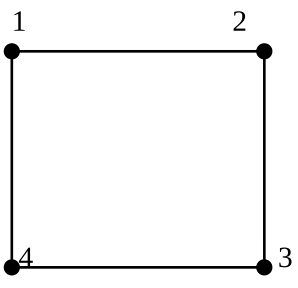
Grafnya tidak bersifat aksi reguler, $\exists\,(12) \in Aut(\Gamma)$ yang bukan identitas sehingga mem-*fix*-kan titik 3 di graf Γ.

G = *Aut*(Γ) tidak abelian, karena $\exists\,(23),(12) \in$ G ∍ $(23)\circ(12) \neq (12)\circ(23)$ atau (132) ≠ (123).

**Contoh 4.**

Kemungkinan Graf Γ dengan 4 titik yang bersifat *transitif-titik* adalah sebagai berikut:

i). Perhatikan graf Γ berikut,

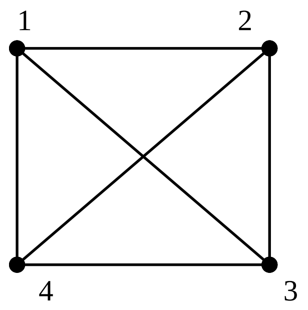



Polinomial P($\lambda$) = $\lambda^2\,(\lambda-2)\quad(\lambda+2)$ ,tidak semua nilai eigenya sederhana.

Grafnya tidak bersifat aksi reguler, karena $\exists\,(24) \in Aut(\Gamma)$ yang bukan identitas, sehingga mem-*fix*-kan titik 1 dan 3 di graf Γ.

G = *Aut*( Γ) tidak abelian, karena $\exists$ (23),(12) $\in$ G ∍ $(23)\circ(12) \neq (12)\circ(23)$ atau (132) ≠ (123).

ii). Perhatikan graf $\Gamma$ berikut,




Polinomial $P(\lambda) = (\lambda - 3)\ (\lambda + 1)^3$, tidak semua nilai eigen-nya sederhana.

Grafnya tdak bersifat aksi reguler, karena $\exists\ (12) \in Aut(\Gamma)$ yang bukan identitas, sehingga mem-*fix*-kan titik 3 dan 4 di graf $\Gamma$.

G = Aut( $\Gamma$) tidak abelian, karena $\exists$ $(23),(12) \in G$ $\ni$ $(23) \circ (12) \neq (12) \circ (23)$ atau $(132) \neq (123)$.

**Proposisi 2.**

Misalkan $\Gamma$ adalah graf transitif titik yang mempunyai derajat k, dan misalkan $\lambda$ adalah nilai eigen sederhana dari $\Gamma$ . Jika $|V\Gamma|$ ganjil maka $\lambda = k$. Jika $|V\Gamma|$ genap, maka $\lambda$ adalah satu dari integer $2\alpha - k$ $(0 \le \alpha \le k)$.

**Bukti:**

Misalkan **x** adalah vektor eigen real yang berkorespondensi dengan nilai $\lambda$, dan misalkan **P** matriks permutasi yang merepresentasikan *suatu automorfisma* $\pi$ dari $\Gamma$. Jika $\pi(v_i) = v_j$, maka diperoleh hubungan $x_i = (\mathbf{Px})_j$ sedangkan $(\mathbf{Px})_j = \pm x_j$. Jadi diperoleh $x_i = (\mathbf{Px})_j = \pm x_j$.

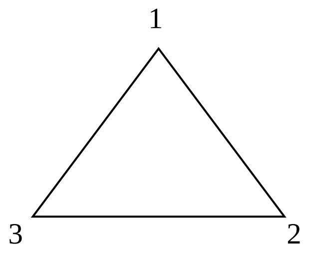
Karena graf $\Gamma$ adalah transitif titik maka untuk setiap $v_i, v_j \in V\Gamma$ dengan $i \neq j$ terdapat automorfisma $\pi$ sehingga berlaku $\pi(v_i) = v_j$ , akibatnya terdapat **P** matriks permutasi yang merepresentasikan *suatu automorfisma* $\pi$ sehingga berlaku $x_i = \pm x_j$ .Jadi semua entri dari **x** mempunyai nilai mutlak yang sama. Selanjutnya, misalkan $\mathbf{u} = [1,1 \ldots,1]^t$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen k, jadi jika $\lambda \neq k$ sehingga menurut sifat aljabar, vektor eigen $\mathbf{u}^t$ tegak lurus dengan vektor eigen **x** (hasil kali dalam $< \mathbf{u}^t , \mathbf{x} > = 0$ ) maka $\mathbf{u}^t \mathbf{x} = 0$, yaitu $\Sigma x_i = 0$. Hal ini tidak mungkin untuk bilangan ganjil dengan jumlah dari nilai mutlak setiap sukunya sama akibatnya $\Sigma x_i \neq 0$ , jadi haruslah $\lambda = k$ ( k ganjil).

Jika $\Gamma$ mempunyai titik berjumlah genap, pilih satu titik $v_i$ dari $\Gamma$ dan misalkan titik-titik $v_j$ bertetangga dengan $v_i$, selanjutnya misalkan ada sejumlah $\alpha$ buah yang memberikan hubungan $x_j = x_i$ ,maka sisanya ada sejumlah $k - \alpha$ buah yang memberikan hubungan $x_j = -x_i$. Karena baris ke-i dari matriks **Ax** memberikan $(\mathbf{Ax})_i = \lambda x_i$ untuk suatu nilai $\lambda$, sehingga menghasilkan $\Sigma' x_j = \lambda x_i$, yang sesuai dengan jumlah semua titik yang bertetangga dengan $v_i$.

Jadi $\alpha x_i + (k - \alpha)(-x_i) = \alpha x_i - (k - \alpha) x_i = (2\alpha - k) x_i = \lambda x_i$, maka diperoleh $\lambda = 2\alpha - k$ , dengan $0 \le \alpha \le k$ . Jadi terbukti proposisi 2.

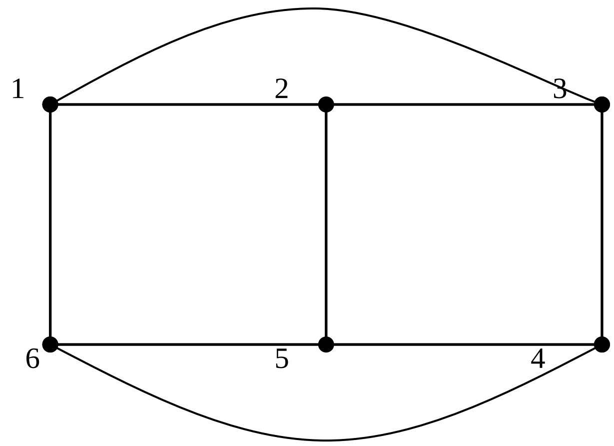
**Contoh 5.**

**a)**. Untuk $|V\Gamma|$ ganjil, misalkan graf $\Gamma$ adalah graf lengkap $K_3$ dimana $|V\Gamma|$ ganjil , 2-reguler (k=2) dan bersifat transitif titik seperti gambar dibawah ini:




Maka Polynomial $P(\lambda)$ = det $(A-\lambda I)$ = $(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ = 0, A adalah matriks ketetanggaan dan nilai eigen sederhana $\lambda = 2 = k$

**b).** Untuk $|V\Gamma|$ genap, misalkan graf $\Gamma$ adalah graf Ladder $L_3$ dimana $|V\Gamma|$ genap , 3-reguler (k=3)dan bersifat transitif titik seperti gambar dibawah ini:




Maka Polynomial $P(\lambda)$ = det $(A-\lambda I)$ = $\lambda^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2)^2$ dan nilai eigen sederhananya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 3$.

**Proposisi 3.**

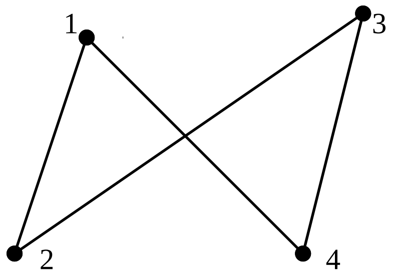
Misalkan $\Gamma$ graf simetris dengan derajat k, dan misalkan $\lambda$ nilai eigen sederhana dari $\Gamma$.
Maka $\lambda = \pm$ k.

**Bukti:**

Dari pembuktian proposisi 2, misalkan $v_j$ dan $v_l$ adalah dua titik sembarang yang bertetangga dengan $v_i$ maka terdapat automorfisma $\pi$ dari $\Gamma$ , sedemikian sehingga diperoleh $\pi(v_i) = v_i$ dan $\pi(v_j) = v_l$. Jika **P** matriks permutasi yang merepresentasikan $\pi$, maka $\pi(v_i) = v_i$ mengakibatkan $\mathbf{Px} = \mathbf{x}$ dan dari $\pi(v_j) = v_l$ diperoleh $x_j = (\mathbf{Px})_l = x_l$ sedangkan $(\mathbf{Px})_l = x_l$ akibatnya $x_j = x_l$. Jadi karena $\Gamma$ graf berderajat *k*, maka dari pembuktian proposisi 2 hanya ada 2 kemungkinan nilai $\alpha$ yaitu, jika $\alpha = 0$ memberikan nilai $\lambda = -k$ , atau jika $\alpha = k$ memberikan nilai $\lambda = k$.
*Jadi diperoleh* $\lambda = \pm$ k.

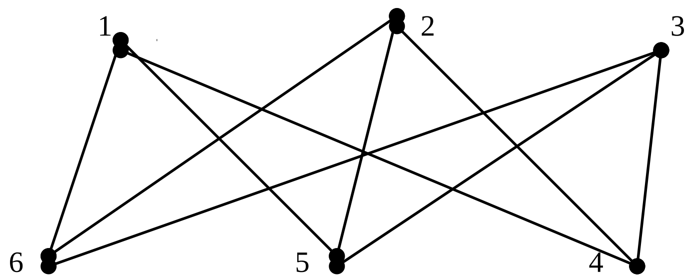
**Contoh 6.**

**a).** Perhatikan kembali ilustrasi 4b, graf bipartite $K_{2,2}$ 2 - reguler (k=2) berikut:



Maka Polynomial P(λ) = det (A-λI) = $\lambda^2 (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, dengan A matriks ketetanggaan dan nilai eigen sederhananya adalah λ = $\pm 2$.

**b)**. Perhatikan graf bipartite $K_{3,3}$ 3 - reguler (k=3) berikut:



Maka Polynomial P(λ) = det (A-λI) = $\lambda^4 (\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$, dengan A matriks ketetanggaan dan nilai eigen sederhananya adalah λ = $\pm 3 = \pm k$.

**c)**. Perhatikan untuk $\Gamma$ graf lengkap $K_4$ maka 3- reguler .

Polinomial P($\lambda$) = det (A-λI) = $(\lambda - 3)\ (\lambda + 1)^3$, dengan A matriks ketetanggaan dan nilai eigen sederhananya adalah λ = 3 = k.

## 4. Penutup

Suatu grup abstrak hingga G memenuhi graphical regular representation (GRR), jika ada graf $\Gamma$ sedemikian sehingga G isomorfik dengan *Aut*($\Gamma$), dan *Aut*($\Gamma$) beraksi regular pada $V\Gamma$. Contohnya adalah graf $\Gamma = K_2$. Misalkan $\Gamma$ adalah graf transitif titik yang mempunyai derajat k, dan misalkan $\lambda$ adalah nilai eigen sederhana dari $\Gamma$ . Jika $|V\Gamma|$ ganjil maka $\lambda = k$. Jika $|V\Gamma|$ genap, maka $\lambda$ adalah satu dari integer $2\alpha - k$ ($0 \leq \alpha \leq k$). Contohnya Untuk $|V\Gamma|$ ganjil, misalkan graf $\Gamma$ adalah graf lengkap $K_3$ , 2-reguler (k=2) dan bersifat transitif titik maka nilai eigen sederhana $\lambda = 2 = k$, sedangkan Untuk $|V\Gamma|$ genap, misalkan graf $\Gamma$ adalah graf Ladder $L_3$, 3-reguler (k=3) dan bersifat transitif titik, maka nilai eigen sederhananya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 3$.

## Daftar Pustaka


[1] N. Biggs (1990). *Algebraic Graph Theory*, 2nd Ed., Cabridge Mathematical Library, 1993.

[2] N.Hartsfield and G.Ringel (1990). *Pearls in Graph Theory*, Academic Press.

[3] R. J. Wilson & J. J. Watkins (1990). *Graphs An Introductory Approach*, John Wiley & Sons.

[4] V.Bryant (1993). *Aspects of Combinatorics*, Cambridge University Press,.