Jurnal Matematika Vol.9 No.1
November 2009 [1 : 6]

SIFAT-SIFAT GENERATOR MODUL HOMOTOPI KEDUA DENGAN MENGGUNAKAN TRANSFORMASI NIELSEN

Yanita[1] and Abdul Ghafur Ahmad[2]

1)Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Andalas Padang
e-mail: yanita4sri@yahoo.com

2)Pusat Pengajian Sains Matematik, Fakulti Sains Dan Teknologi,
Universiti KebangsaanMalaysia, 43600 Bangi, Malaysia
e-mail: ghafur@pkrisc.cc.ukm.my

Abstract. This paper discuss about relation the second homotopy module related to two different presentations which defining the same group. These presentations can be transformed each other using Nielsen transformation methods. This method only modifying its relator. We consider the generators of second homotopy module after using Nielsen transformations.

Keyword : *second homotopy module, Nielsen transformations, generators.*

1. Pendahuluan

Misalkan P = $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{R} \rangle$ presentasi group yang mendefinisikan group *G*. Dari presentasi ini dapat diperoleh *group fundamental pertama* π_1(P) atas P. Unsur-unsur dari π_1(P) adalah kelas-kelas ekivalensi dari *word* [*W*]. Selanjutnya, dari presentasi ini juga dapat diperoleh *picture* atas P. Suatu *picture* atas P adalah objek yang memuat lengkung-lengkung (*arcs*) yang berbeda yang diberi nama dengan unsur-unsur dari ***a***, disk-disk (*discs*) yang diberi nama dengan unsur-unsur dari ***r***, dan suatu disk batas yang dilengkapi dengan suatu titik awal. Masalah picture ini dijelaskan dengan rinci pada [6].

Suatu *picture* atas P disebut *spherical picture* jika semua lengkung dalam P tidak menyentuh disk batas. Selanjutnya diperoleh *group fundamental kedua* π_2(P), yang unsur-unsurnya merupakan kelas-kelas ekivalensi dari *spherical picture* [P]. Oleh karena group ini adalah group abelian dan juga merupakan modul-$\mathbb{Z}G$ kanan dengan aksi yang disebabkan oleh $[\mathbb{P}]\overline{W} = [\mathbb{P}W]$ ($\overline{W}$ adalah unsur dari *G* yang direpresentasikan oleh *W*.), maka group ini lebih sering disebut sebagai *modul homotopi kedua* [2:398]. (Dalam hal ini pun, penulis akan menggunakan istilah ini).

Suatu himpunan *spherical picture* ***P*** atas P disebut sebagai *himpunan generator picture* jika $\{[\mathbb{P}]:\mathbb{P} \in \boldsymbol{P}\}$ membangun modul-$\mathbb{Z}G$ π_2(P) (lihat [2]). Selanjutnya [1] menyebutkan bahwa ***P*** himpunan generator jika dan hanya jika setiap *spherical picture* atas P dapat ditransformasikan ke picture kosong dengan operasi-operasi pada picture.

2. Ekivalensi Di Antara Picture Dan Operasi-Operasi Pada Picture

2.1 Ekivalensi di antara dua presentasi group

Ekivalensi di antara dua presentasi group, misalkan P dan Q terjadi karena terdapatnya suatu transformasi dari P hingga Q.

Definisi 2.1

Misalkan G group dan $\mathcal{Q} = (x_1, \ldots, x_n; R_1, \ldots, R_m) = (x_i; R_j)$ *presentasi berhingga untuk G. Maka terdapat operasi kombinatorial pada presentasi* Q :

1) *Operasi perluasan* (*expansion operation*) : *pada operasi ini dtambahkan suatu generator baru pada* Q, *yang mana generator ini tidak berada pada* $\{x_i\}$, *dan juga ditambahkan relator* Wx^{-1}, *W adalah unsur dalam group bebas F pada generator* $x_1, \ldots, x_n$. *Perubahan ini dapat dilihat sebagai berikut* :
$$(x_i; R_j) \to (x_i, x; R_j, Wx^{-1}), x \notin \{x_i\}.$$
2) *Operasi penyiutan* (*contraction operation*) : *kebalikan dari operasi perluasan.*
3) *Operasi pertukaran* (*replacement operation*) : *mengganti relator tunggal R dengan relator baru S, S dan* $R^{\pm 1}$ *adalah modulo konjugat subgroup normal* $N(R_j)$ *dari F yang dibangun oleh relator lain* R_j *yang dibiarkan tidak diganti. Perubahan ini dapat dilihat sebagai berikut :* $(x_i; R_j, R) \to (x_i; R_j, S)$.

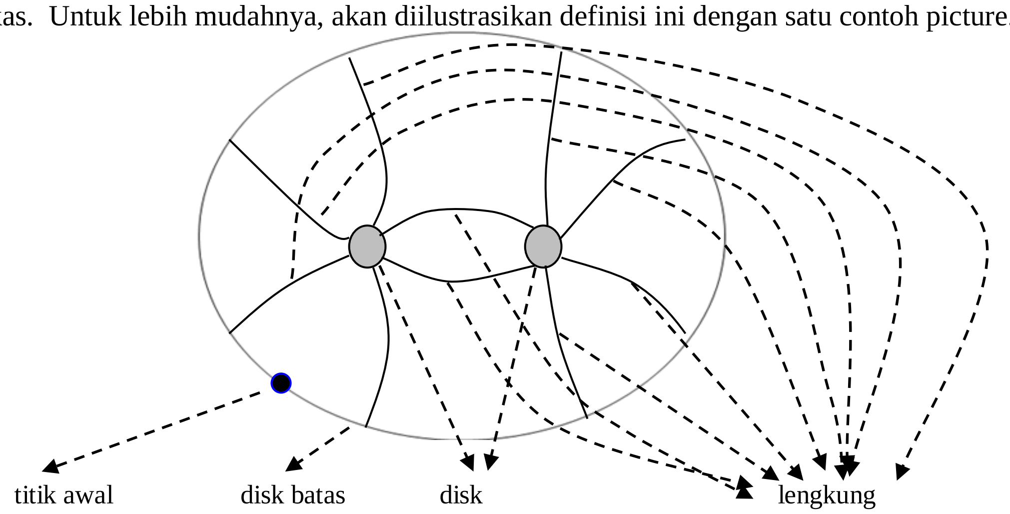
Misalkan P dan Q dua presentasi group *G*. Dikatakan P dan Q ekivalen secara kombinatorial jika terdapat barisan :
$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \to \mathcal{P}_1 \to \cdots \to \mathcal{P}_{s-1} \to \mathcal{P}_s = \mathcal{Q}. \quad (1)$$
Barisan ini diperoleh dari operasi-operasi kombinatorial, yang dimulai dari P dan diakhiri dengan Q (lihat [4] dan [7]).

Ada beberapa transformasi yang dapat dilakukan untuk mendapatkan barisan (1). Antaranya adalah transformasi Tietze (lihat [5]), transformasi Nielsen dan transformasi *Q*** (lihat [3]). Dengan menggunakan transformasi-transformasi ini dapat dilihat perubahan-perubahan yang terjadi untuk setiap presentasi group yang diberikan. Transformasi ini meliputi perubahan-perubahan yang mungkin saja melibatkan generator, relator, ataupun keduanya pada suatu presentasi group tersebut.

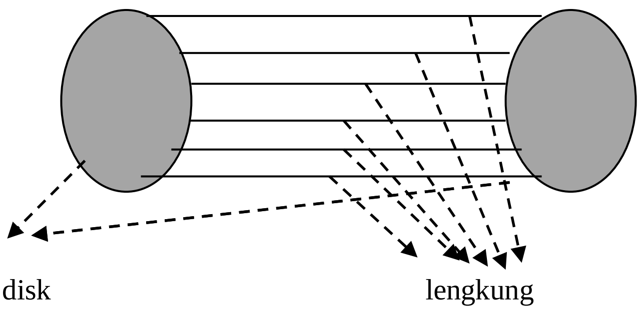
Untuk membahas mengenai ekivalensi di antara picture, terlebih dahulu dijelaskan mengenai operasi-operasi pada picture. Operasi-operasi inilah yang akan menyebabkan dua picture dikatakan ekivalen.

2.2 Operasi Pada Picture

Pada bagian Pendahuluan telah dijelaskan definisi picture dan spherical picture secara ringkas. Untuk lebih mudahnya, akan diilustrasikan definisi ini dengan satu contoh picture.



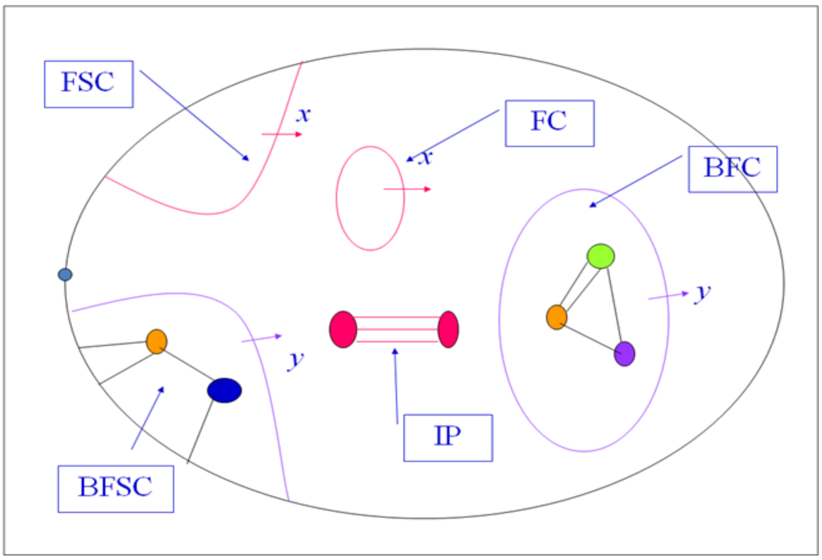
Gambar 1. Contoh Picture



Gambar 2. Contoh Spherical Picture

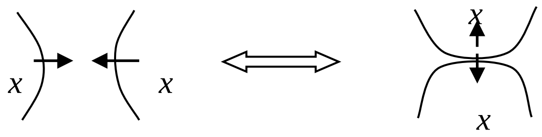
Oleh karena semua lengkung pada spherical picture tidak menyentuh disk batas, maka pada penggambarannya, disk batas sering diabaikan (tidak dibuat), seperti terlihat pada Gambar 2.2.2.

Operasi-operasi dasar pada picture meliputi menghapus/menambah lingkaran terapung (*floating circle*), menghapus/menambah semi lingkaran terapung (*floating semicircle*), menghapus/menambah pasangan invers (*inverses* (*cancelling*) *pair*), dan jembatan (*bridge move*). Lingkaran terapung adalah lengkung tertutup yang di dalamnya tidak terdapat disk, semi lingkaran terapung adalah lengkung yang menyentuh disk batas dan tidak terdapat disk di dalamnya, dan pasangan invers adalah spherical picture yang mempunyai tepat dua disk (lihat [6]). Jembatan adalah perubahan arah dan letak dua lengkung yang mempunyai nama yang sama tetapi arah berbeda. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar2.2.3 dan 2.2.4.



Keterangan:
(B)FC : (Bukan) Lingkaran Terapung (*Floating circle*)
(B)FSC : (Bukan) Semi Lingkaran Terapung (*Floating semicircle*)
FP : Pasangan Invers (*Inverses* (*cancelling*) *pair*)dengan nama *x* dan *y*

Gambar 3



Gambar 4. Jembatan (*Bridge move*)

Dua picture (spherical picture) P dan P' dikatakan ekivalen jika P' dapat diperoleh dari P dengan sejumlah berhingga operasi menambah/menghapus lingkaran terapung, menambah/menghapus semi lingkaran terapung, menambah/menghapus pasangan invers dan jembatan.

Ekivalensi di antara dua presentasi berkaitan erat dengan ekivalensi dua spherical picture. Misalkan dipunyai barisan ekivalensi dua presentasi seperti pada (1). Perubahan yang terjadi pada $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_{i+1}$ merupakan perubahan yang terjadi pada relator atau generator (tergantung operasi yang digunakan) merupakan ekivalensi antara dua presentasi group, sementara perubahan gambar spherical picture yang terjadi akibat ekivalensi dua presentasi group merupakan ekivalensi antara dua spherical picture.

Perubahan generator pada transformasi Tietze telah ditunjukkan oleh Yanita, Ghafur (lihat [8]). Sementara itu transformasi *Q*** merupakan lanjutan dari transformasi Nielsen. Adapun operasi-operasi pada transformasi Nielsen adalah sebagai berikut:

Misalkan P $= \langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{r} \rangle$ presentasi group yang mendefinisikan group *G*.

N1: Tukar r_i menjadi wr_iw^{-1} untuk suatu $r_i \in \boldsymbol{r}$ dan *w* *word* dalam $\boldsymbol{a}$.

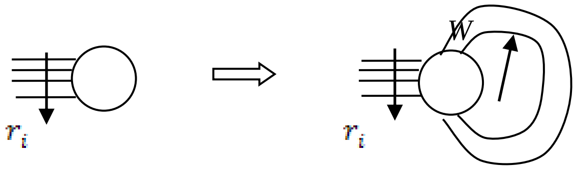
N2: Tukar r_i menjadi r_i^{-1} ($r_i \in \boldsymbol{r}$).

N3: Tukar r_i menjadi $r_i \cdot r_k$ atau $r_k \cdot r_i$ ($r_i, r_k \in \boldsymbol{r},\ i \neq k$).

Transformasi Nielsen ini hanya melibatkan perubahan relator pada suatu presentasi group. Oleh karena itu diperoleh sifat-sifat sebagai berikut

Teorema 2.2

Misalkan $\mathcal{Q} = \langle \boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{r}_2 \rangle$ *ditransformasikan oleh transformasi Nielsen dari* $\mathcal{P} = \langle \boldsymbol{a}_1 : \boldsymbol{r}_1 \rangle$. *Jika* $\mathbb{P} \in \pi_2(\mathcal{P})$ *memuat disk-*r_i *maka picture* $\mathbb{Q} \in \pi_2(\mathcal{P})$ *yang sama dengan disk-*r_i *menjadi disk* Wr_iW^{-1} (*untuk suatu* $r_i \in \boldsymbol{r}_1$ *dan W word dalam* $\boldsymbol{a}_1$)



Bukti:
Misalkan P dibangun oleh himpunan **P**, maka spherical picture dari **P** mempunyai label dari $\boldsymbol{r}_1$ dan Q dibangun oleh himpunan **Q** dengan spherical picture dari **Q** mempunyai label dari $\boldsymbol{r}_2$. Jika **P** tidak mempunyai disk-r_i maka $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$. Misalkan terdapat disk-r_i pada **P** maka pada himpunan **Q** digambarkan disk-r_i menjadi disk-Wr_iW^{-1}, di mana *W* adalah word dalam $\boldsymbol{a}_1$. Oleh karena itu diperoleh himpunan **Q** memuat disk-Wr_iW^{-1}.■

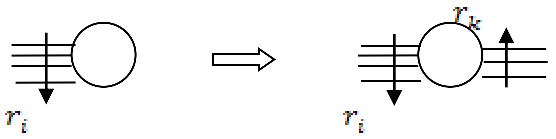
Teorema 2.3

Misalkan $\mathcal{Q} = \langle \boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{r}_1 \rangle$ *ditransformasikan oleh transformasi Nielsen dari* $\mathcal{P} = \langle \boldsymbol{a}_2 : \boldsymbol{r}_2 \rangle$. *Jika* $\pi_2(\mathcal{P})$ *dibangun oleh* **P** *maka* $\pi_2(\mathcal{Q})$ *dibangun oleh* **P**.

Bukti :
Misalkan P dibangun oleh himpunan **P**, maka spherical picture dari **P** mempunyai label dari $\boldsymbol{r}_1$ dan Q dibangun oleh himpunan **Q** dengan spherical picture dari **Q** mempunyai label dari $\boldsymbol{r}_2$. Jika **P** tidak mempunyai disk-r_i maka $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$. Misalkan terdapat disk-r_i pada himpunan **P** maka pada himpunan **Q** digambarkan disk-r_i menjadi disk-r_i^{-1}. Oleh karena disk-r_i dan disk-r_i^{-1} mempunyai bentuk yang sama (hanya arah berbeda), maka $\mathcal{P}$ mempunyai generator yang sama dengan Q, atau **P** = **Q**. ■

Teorema 2.4

Misalkan $\mathcal{Q} = \langle \boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{r}_2 \rangle$ *ditransformasikan oleh transformasi Nielsen dari* $\mathcal{P} = \langle \boldsymbol{a}_1 : \boldsymbol{r}_1 \rangle$. *Jika* $\mathbb{P} \in \pi_2(\mathcal{P})$ *memuat disk-*r_i *maka picture* $\mathbb{Q} \in \pi_2(\mathcal{P})$ *yang sama dengan disk-*r_i *ditukar dengan disk-*$r_i r_k$ *dan dihubungkan dengan disk-*r_i $(r_i, r_k \in \boldsymbol{r}_1)$.



Bukti:
Misalkan P dibangun oleh himpunan **P**, maka spherical picture dari **P** mempunyai label dari $\boldsymbol{r}_1$ dan Q dibangun oleh himpunan **Q** dengan spherical picture dari **Q** mempunyai label dari $\boldsymbol{r}_2$. Jika **P** tidak mempunyai disk-r_i maka $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$. Misalkan terdapat disk-r_i pada himpunan **P** maka pada himpunan **Q** digambarkan disk-r_i menjadi disk-$r_i r_k$. Oleh karena itu diperoleh himpunan **Q** yang memuat disk-$r_i r_k$. ■

Referensi

[1]. W. A. Bogley, S.J. Pride,: Calculating generator of π_2, in wo-dimensional homotopy and combinatorial group theory (Hog-Angeloni, C., Metzler, W., Sieradski, A.J., eds.), *CUP*, 157 – 188 (1993).

[2] Y. G. Baik, J. Harlander, S.J.Pride, The geometry of group extensions, *J. Group Theory* 1 (1998) 395 – 416.

[3] C. Hog-Angeloni, W. Metzler. 1993. Geometric aspects of two-dimensional complexes. In *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory* (eds. C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski), London Math. Soc. Lecture Note Ser. No. 197 (Cmbridge University Press), pp. 1 – 44.

[4] S. Jajodia, Combinatorial equivalence between group presentations, *Proceeding of the American Mathematical Society*, Vol. 85, No. 2, (1982) 165 – 168.

[5] W. Magnus, A. Karras and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Dover, New York, 1976.

[6] S. J. Pride, *Identities among relations of groups presentations, in Group theory from geometrical viewpoint – Trieste 1990*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, (1991) 687 – 717.

[7] A. J. Sieradski, Combinatorial isomorphisma and combinatorial homotopy equivalences, *J. Pure App. Algebra* 7 (1976), 59 – 95

[8] Yanita & A. G. Ahmad. 2009. *Computing Generators of Second Homotopy Module Using Tietze Transformation Methods*. Makalah yang dipresentasikan pada International Conference on Mathematics, Statistics and Their Applications, Bukittinggi, 9 – 11 Juni.