Jurnal Matematika Vol.12 No.1
November 2013 [1 : 8]

TRANSFORMASI AFFIN PADA BIDANG

Gani Gunawan[1] dan Suwanda[2]

[1]*Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung*
[2] *Prgram Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung*
e-mail: [1]ggani07@yahoo.com; [2]wanda_100358@yahoo.co.id

Abstrak Menjelaskan sifat objek geometri Euclid secara analitis dan aljabar dalam matematika dapat dijelaskan dengan sebuah transformasi. Dalam hal ini transformasi dipandang sebagai pemetaan bijeksi terhadap dirinya sendiri. Masalahnya adalah transformasi yang seperti apa dapat diterapkan agar objek geometri pada suatu bidang Eucild dapat dijelaskan secara analitis dan aljabar sedemikian sehingga beberapa sifat geometri yang ada pada bidang tersebut dapat dipertahankan. Transformasi affin 2D adalah sebuah transformasi pada bidang yang dapat mengatasi hal itu, di mana transformasi ditentukan oleh sebuah matriks persegi yang *invertible* dan sebuah vektor kolom. Transformasi affin bersifat linier, sehingga sifat objek geometris yang ditransformasi adalah *invariant*. Dalam hal ini transformasi affin mempertahankan kesegarisan, kesejajaran, dan perbandingan, namun tidak mengawetkan kesebangunan.

Kata kunci : *geometri affin, transfomasi, invarian*

1. Pendahuluan

Seperti yang telah diketahui bahwa objek "*titik"* pada geometri Euclid adalah merupakan unsur terkecil yang membangun sistem matematika geometri tersebut. Oleh karena itu bangun geometri yang terbentuk pada bidang atau ruang dalam geometri ini dapat dijelaskan melalui objek titik itu sendiri. Dalam perkembangan selanjutnya sifat objek geometri Euclid ini dapat dijelaskan secara analitik dan aljabar. Untuk keperluan menjelaskannya, diperlukan suatu cara matematis yang dapat menjabarkannya. Sehingga timbul suatu permasalahan untuk itu. Pertama, bagaimanakah cara menjelaskan sifat objek geometri Euclid agar dapat dijelaskan secara analitik dan aljabar? Kedua, bagaimanakah mengindentifikasi titik pada bidang Euclid dengan sebuah vektor? Ketiga, bagaimanakah mentransformasi ruang titik pada bidang Euclid dengan ruang vektor? Keempat, sifat geometri apa saja yang dapat dipertahankan pada saat ruang titik ditransformasi dengan ruang vektor?

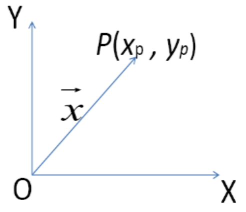
2. Pemetaan sebagai Transformasi Bidang

Untuk membahas masalah pertama dapat dijelaskan melalui konsep *fungsi* atau *pemetaan*. Misalkan A dan B adalah himpunan yang tidak hampa. Suatu fungsi atau pemetaan f dari A ke B yang dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah pasangan terurut (a,b), dengan $a \in A$ dan $b \in B$ yang bersifat untuk setiap $a \in A$ ada sebuah $b \in B$ yang tunggal sedemikain sehingga $(a,b) \in f$ atau dapat ditulis $f(a) = b$. Dalam hal ini dapat dikatakan b adalah peta dari a pada f, dan a adalah pra-peta b pada f. Himpunan A disebut *domain* f, dan himpunan B disebut *co-domain* f. Himpunan $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ adalah himpunan bagian dari B disebut *range* dari f.

Suatu fungsi f: $A \rightarrow B$ disebut *surjektif* (atau onto) jika $f(A) = B$, yaitu f surjektif jika untuk setiap $b \in B$ ada $a \in A$ sedemikan sehingga $f(a) = b$. Fungsi f: $A \rightarrow B$ disebut *injektif* (atau satu ke satu) jika untuk setiap unsur di range f adalah peta dari tepat satu unsur di domain f, yaitu jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$. Selanjutnya suatu fungsi f: $A \rightarrow B$ disebut *bijektif* jika f surjektif dan injektif.

Berdasarkan pengertian fungsi atau pemetaan tersebut, terlihat bahwa suatu unsur pada suatu himpunan yang satu dapat ditransformasi menjadi unsur di himpunan yang lain. Oleh karena itu, berdasarkan gagasan yang ada pada konsep pemetaan tersebut, agar sifat suatu objek pada geometri Euclid dapat dijelaskan secara analitik dan aljabar maka objek geometri tersebut harus ditransformasi menjadi objek yang dapat diberlakukannya sistem matematika secara analitis dan aljabar. Transformasi dalam hal ini dipandang sebagai fungsi bijektif pada dirinya sendiri.

Misalkan E^2 adalah bidang Euclid. Setiap titik P pada bidang E^2 dapat dinyatakan oleh pasangan terurut (x_p, y_p) dalam sistem koordinat XOY. Titik P dapat dinyatakan oleh vektor posisi $\overrightarrow{OP} = \langle x_p, y_p \rangle$



Gambar 1. Titik (x_p, y_p) direpresentasikan sebagai $\overrightarrow{OP} = \langle x_p, y_p \rangle$

Dalam hal ini $\overrightarrow{OP} = \langle x_p, y_p \rangle$ dapat digunakan untuk merepresentasikan $\vec{x}$. Koleksi vektor yang dibentuk dari titik pada bidang Euclid membentuk ruang vektor. Akibatnya pemetaan $f : E^2 \rightarrow E^2$ berkorespondensi dengan pemetaan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sedemikian sehingga

$$f\left(\langle x_p, y_p \rangle\right) = \langle x_{p'}, y_{p'} \rangle, \ \forall \langle x_p, y_p \rangle \in \mathbb{R}^2$$

dengan $f(P) = P'$ untuk $P \in E^2$. Ini berarti f dan f secara tunggal mendefinisikan pemetaan f dengan sistem koordinat tetap sebagai penstransformasian bidang. Oleh karena itu, titik P pada bidang XOY akan berkorenspondensi dengan vektor tunggal $\overrightarrow{OP}$. Setiap objek geometri φ di E^2 berkoresponden si secara tunggal dengan vektor $\overrightarrow{OP}$ di P^2 di mana $P \in \varphi$. Himpunan $f(\varphi)$ yang didefinisikan sebagai $\left\{ f(P) : P \in \varphi \subseteq E^2 \right\}$ dapat dinyatakan dengan $\left\{ f\left(\overrightarrow{OP}\right) : \overrightarrow{OP} \in \varphi \subseteq \mathbb{R}^2 \right\}$, oleh karena itu representasi titik (x,y) dapat dinyatakan sebagai vektor $\langle x, y \rangle$

Contoh

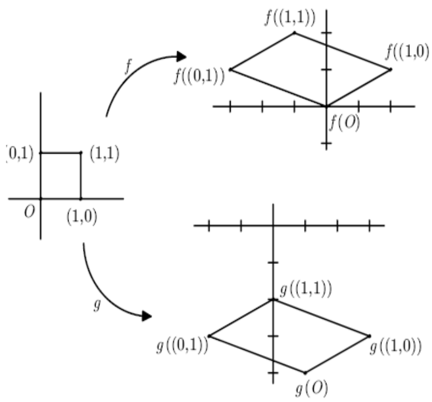
Pemetaan di bawah ini dapat dipandang sebagai pemetaan titik ke titik pada geometri Euclid atau pemetaan vektor ke vektor di P^2.

$$f\left(\langle x, y \rangle\right) = \langle 2x - 3y, x + y \rangle \text{ dan } g\left(\langle x, y \rangle\right) = \langle 2x - 3y + 1, x + y - 4 \rangle .$$

Hasil pemetaan $\vec{x}$ oleh f dan g

$\vec{x}$	$f(\vec{x})$	$g(\vec{x})$
$\langle 0, 0\rangle$	$\langle 0, 0\rangle$	$\langle 1, -4\rangle$
$\langle 0, 1\rangle$	$\langle -3, 1\rangle$	$\langle -2, -3\rangle$
$\langle 1, 0\rangle$	$\langle 2, 1\rangle$	$\langle 3, -3\rangle$
$\langle 1, 1\rangle$	$\langle -1, 2\rangle$	$\langle 0, -2\rangle$

Secara geometri dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2. Pemetaan oleh *f* dan *g* dari bidang ke bidang

Lebih lanjut melalui pemetaan bijektif, memungkinkan untuk menjelaskan aspek sifat objek geometri bidang ini melalui pendekatan analitis dan aljabar matrik. Oleh karena itu, pemetaan

$$f\left(\langle x, y\rangle\right) = \langle 2x-3y, x+y\rangle \text{ dan } g\left(\langle x, y\rangle\right) = \langle 2x-3y+1, x+y-4\rangle$$

dapat dinyatakan dalam matrik sebagai berikut

$$f\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

dan

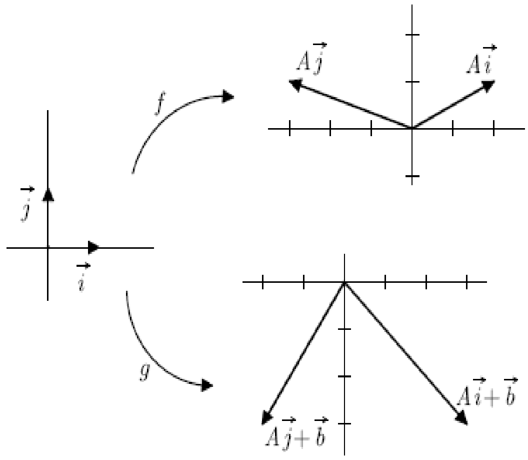
$$g\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

sehingga vektor hasil pemetaanya dapat ditentukan seperti di bawah ini

$$A\vec{i} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\vec{i} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\vec{j} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Secara geometri hasil pemetaannya dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. Transformasi vektor ke vektor

Jelas bahwa *f* dan *g* memetakan segmen garis ke garis (gambar 3). Untuk mengetahui di mana *f* dan *g* memetakan titik (0,0), (0,1), (1,0), dan (1,1) cukup dengan menentukan citra bangun persegi satuan *S* yang memiliki simpul di empat titik tersebut. Oleh karena itu peta bidang persegi satuan *S* adalah berupa bidang jajaran genjang *f*(*S*) dan *g*(*S*) (gambar 2). Ini berarti jelas bahwa *f* dan *g* juga memetakan bidang ke bidang.

3. Transformasi Affin pada Bidang

Dari uraian pembahasan di atas, terlihat bahwa untuk dapat menjelaskan sifat objek geometri Euclid pada bidang agar dapat dijelaskan secara analitik dan aljabar, maka unsur terkecil pembentuk geometri tersebut harus dindentifikasi dengan sebuah vektor pada bidang. Pengindentifikasian dapat dilakukan jika sebuah titik direpresentasikan dalam sebuah vektor melalui suatu transformasi atau pemetaan bijeksi. Pentransformasi ruang titik pada bidang Euclid dengan ruang vektor dalam matematika dapat dilakukan melalui transformasi affin pada bidang yang selanjutnya disebut transformasi affin 2D sedemikian sehingga sifat geometri pada saat ruang titik ditransformasi dengan ruang vektor dapat dipertahankan.

Transformasi affin 2D adalah sebuah pemetaan dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$ yang ditentukan oleh sebuah matrik persegi yang *invertible* dan sebuah vektor kolom, secara matematik didefinisikan sebagai berikut;

Definisi

Misalkan A adalah matrik 2x2 yang invertible, dan $\vec{b}$ vektor kolom di P^2, maka transformasi affin 2D dinyatakan sebagai pemetaan $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan oleh $\vec{x} \mapsto A\vec{x}+\vec{b}$

Akibat dari pendefinisian tersebut dapat ditunjukan bahwa komposisi dari dua transformasi affin 2D masih transformasi affin 2D dan invers dari transformasi 2D adalah masih transformasi affin 2D seperti yang dinyatakan pada teorema 3.1 dan teorema 3.2 berikut;

Teorema 3.1.

Komposisi dari dua transformasi affin 2D adalah masih affin 2D.

Bukti

Misalkan A_1 dan A_2 adalah matrik 2x2 yang *invertible,* dan $\vec{b}_1$ dan $\vec{b}_2$ vektor kolom di P^2, maka untuk sebarang $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ transformasi affin 2D $T_1\left(\vec{x}\right) = A_1\vec{x} + \vec{b}_1$ dan $T_2\left(\vec{x}\right) = A_2\vec{x} + \vec{b}_2$. Akibatnya

$$T\left(\vec{x}\right) = T_2\left(T_1\left(\vec{x}\right)\right)$$

$$= A_2\left(A_1\vec{x} + \vec{b}_1\right) + \vec{b}_2$$

$$= A_2A_1\vec{x} + \left(A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right)$$

Jika dimisalkan $A = A_2A_1$ dan $\vec{b} = \left(A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right)$ maka $T\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} + \vec{b}$ adalah transformasi affin 2D.

■

Teorema 3.2.

Invers dari transformasi affin 2D adalah juga affin 2D

Bukti

Misalkan A adalah matrik 2x2 yang *invertible,* dan $\vec{b}$ vektor kolom di $\mathbb{R}^2$, maka untuk suatu $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ transformasi affin 2D untuk sebarang $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ dapat dinyatakan

$$\vec{a} = A\vec{x} + \vec{b}$$

atau
$$A\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$$

Jadi
$$\vec{x} = A^{-1}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$= A^{-1}\vec{b} - A^{-1}\vec{a}$$

Jika dituliskan kembali dalam bentuk $\vec{x} = B\vec{b} + \vec{c}$ dengan $B = A^{-1}$ dan $\vec{c} = -A^{-1}\vec{a}$, maka ini berarti invers dari transformasi affin 2D adalah masih affin 2D.

■

Dari pendefinisian dan kedua teorema tersebut terlihat bahwa transformasi affin 2D merupakan pemetaan bijektif yang dapat mengindentifikasi ruang titik pada bidang Euclid ke dalam ruang vektor berdimensi dua. Akibatnya bangun bidang geometri Euclid yang dipetakan oleh transformasi affin dapat dipertahankan aspek dimensi bidangnya. Selain dari itu, dengan transformasi affin 2D sifat objek geometri bidang Euclid dapat dijelaskan secara analitik dan aljabar. Geometri transformasi bidang berikut adalah merupakan transformasi affin, yaitu adalah *translasi*, *rotasi*, *dilatasi uniform, dilatasi non uniform*, *refleksi*, dan *shearing*

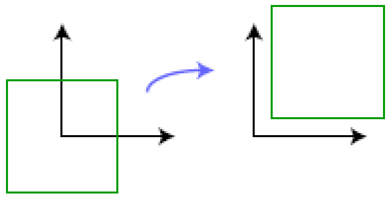
Geometri transformasi bidang — Citra transformasi bidang

(i) **Translasi**,

dapat dinyatakan oleh

$$T\left(\vec{x}\right)=\vec{x}+\vec{b}=I_2\vec{x}+\vec{b},$$

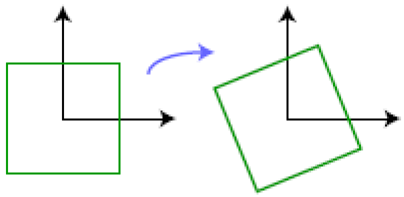
I_2 adalah matrik indentitas ordo 2x2



(ii) **Rotasi**

dapat dinyatakan oleh $T\left(\vec{x}\right)=R_0^{\theta}\vec{x}$,

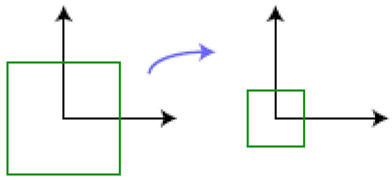
$R_0^{\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ adalah matrik rotasi



(iii) **Dilatasi uniform**

dapat dinyatakan oleh $T\left(\vec{x}\right)=I_a\vec{x}$,

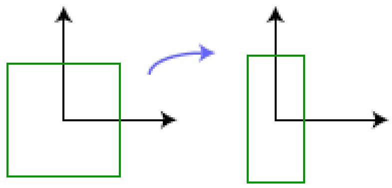
$I_a=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$, untuk suatu skalar a



(iv) **Dilatasi non uniform**

dapat dinyatakan oleh $T\left(\vec{x}\right)=I_{ab}\vec{x}$,

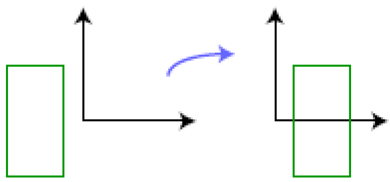
$I_{ab}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$, untuk suatu skalar a dan b



(v) **Refleksi**

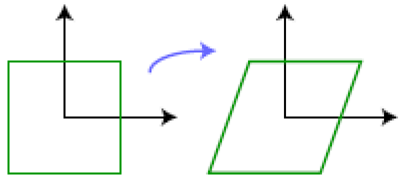
dapat dinyatakan oleh $T\left(\vec{x}\right)=M_{2x2}\vec{x}$

$M_{2x2}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ adalah matrik refleksi



(vi) **Shearing**

dapat dinyatakan oleh $T\left(\vec{x}\right)=S_{2x2}\,\vec{x}$



$S_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & h\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, untuk suatu skalar h

Secara umum sifat suatu objek geometri yang ditransformasi melalui transforamsi affin dapat ditunjukan dalam teorema 3.3 berikut

Teorema 3.3

Misalkan $T\left(\vec{x}\right)=A\vec{x}+\vec{b}$ adalah transformasi Affin, maka T

i. Memetakan segmen garis ke segmen garis
ii. Mempertahankan sifat kesejajaran antara garis dengan garis
iii. Memetakan bidang segi n ke bidang segi n
iv. Mempertahankan rasio panjang dua segmen garis sejajar

Bukti

(i) Misalkan *l* adalah segmen garis, maka persamaan *l* dapat ditulis dalam bentuk vektor $\vec{p}+t\vec{u}$, untuk suatu *t* di interval tutup *I*. Sehingga untuk setiap $t\in[0,1]$

$$T\left(\vec{p}+t\vec{u}\right)=A\left(\vec{p}+t\vec{u}\right)+\vec{b}=\left(A\vec{p}+\vec{b}\right)+t\left(A\vec{u}\right)=\vec{p_1}+t\vec{u_1}$$

dengan $\vec{p_1}=A\vec{p}+\vec{b}$ dan $\vec{u_1}=A\vec{u}$. Akibatnya $T(l)=l_1$ dengan $l_1=\vec{p_1}+t\vec{u_1}$ untuk $t\in[0,1]$ adalah juga segmen garis. ■

(ii) Misalkan l : $\vec{p}+t\vec{u}$ dan m: $\vec{q}+t\vec{v}$ untuk setiap $t\in\mathbb{R}$ adalah dua buah garis yang sejajar. Maka $\vec{v}=k\vec{u}$ untuk suatu $k\in\mathbb{R}$. Oleh karena itu

$$T\left(\vec{p}+t\vec{u}\right)=A\left(\vec{p}+t\vec{u}\right)+\vec{b}=\left(A\vec{p}+\vec{b}\right)+t\left(A\vec{u}\right)=\vec{p_1}+t\vec{u_1}\text{, dan}$$

$$T\left(\vec{q}+t\vec{v}\right)=A\left(\vec{q}+t\left(k\vec{u}\right)\right)+\vec{b}=A\left(\vec{q}+t\left(k\vec{u}\right)\right)+\vec{b}$$

$$=\left(A\vec{q}+\vec{b}\right)+t\left(Ak\vec{u}\right)+\vec{b}=\left(\vec{q_1}+t\left(k\vec{u_1}\right)\right)$$

Ini berarti l dan m dipetakan ke garis l_1 dan m_1 yang sejajar. ■

(iii) Dalam hal ini akan dibuktikan dengan induksi. Misalkan $n=3$, Pandang sebuah bidang segitiga *G*. Maka *G* dapat direpresentasikan dalam bentuk vektor $\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}$, untuk $s,t\in[0,1]$, dan $s+t\leq 1$ dengan $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ adalah vektor yang tidak segaris. Akibatnya

$$
\begin{aligned}
T(G) = T\left(\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}\right) &= A\left(\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}\right) + \vec{b} \\
&= \left(A\vec{u} + \vec{b}\right) + s\left(A\vec{v}\right) + t\left(A\vec{w}\right) \\
&= \vec{u}_1 + s\vec{v}_1 + t\vec{w}_1,
\end{aligned}
$$

dengan $s, t \in [0,1]$ dan $s + t \leq 1$. Karena $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ tidak segaris, maka menurut (ii) $\vec{v}_1 = A\vec{v}$ dan $\vec{w}_1 = A\vec{w}$ tidak sejajar. Jadi G dipetakan ke segitiga G_1, di mana $G_1 = \vec{u}_1 + s\vec{v}_1 + t\vec{w}_1$.

Sekarang misalkan T memetakan setiap bidang segi n ke bidang segi n untuk setiap n, dengan $3 \leq n \leq k$, dan misalkan $\mathcal{P}$ adalah polygon dengan k+1 sisi. Misalkan $\overrightarrow{AB}$ adalah diagonal dalam $\mathcal{P}$, maka disgonal ini membagi $\mathcal{P}$ menjadi dua polygon, yaitu $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ yang masing-masing memuat t dan $k+3-t$ sisi, untuk suatu t dengan $3 \leq t \leq k$. Menurut hipotesis induksi di atas, $T(\mathcal{P}_1)$ dan $T(\mathcal{P}_2)$ masing-masing akan merupakan polygon yang dibentuk dengan t sisi dan $k+3-t$ sisi. Karena polygon ini akan mempunyai segment garis dari $T(A)$ ke $T(B)$ sebagai diagonal, maka gabungan $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ akan membentuk sebuah polygon dengan $k + 1$ sisi. Ini berlaku untuk setiap polygon dengan n sisi. Terbukti bahwa T memetakan bidang segi n ke bidang segi n. ■

(iv) Pandang dua buah segmen garis sejajar, S_1 dan S_2 yang dinyatakan dalam bentuk vektor S_i : $\vec{p} + t\vec{u}$ untuk $t \in [0,1]$. Karena dua garis tersebut sejajar, maka $\vec{u_2} = k\vec{u_1}$ untuk suatu $k \in \mathbb{R}$. Misalkan $\left|\vec{u}_i\right|$ adalah panjang untuk segmen garis S_i, rasio pajang segmen garis S_2 dan S_1 adalah $|k|$. Maka menurut (i), segmen garis S_i dipetakan ke segmen garis yang mempunyai panjang $\left|A\vec{u}_i\right|$. Karena $A\vec{u}_2 = A\left(k\vec{u}_1\right) = k\left(A\vec{u}_1\right)$, maka $\left|A\vec{u}_2\right| = |k|\left|A\vec{u}_1\right|$ yang menunjukan bahwa rasio panjang $T(S_1)$ dan $T(S_2)$ adalah juga $|k|$. ■

4. Kesimpulan

Karena transformasi merupakan pemetaan bijektif terhadap dirinya sendiri, maka dengan transformasi unsur pembentuk terkecil pada geometri Euclid di bidang dapat di pandang sebagai vektor di bidang, sehingga sifat objek geometri Euclid pada bidang dapat dijelaskan secara analitik dan aljabar. Agar pengindentifikasian ruang titik pada bidang Euclid yang dilakukan melalui transformasi vektor dapat mempertahankan sifat-sifat yang dipetakannya, maka transformasi geometri yang mungkin adalah transformasi affin pada bidang. Seperti yang telah dijelaskan, transformasi affin bersifat linier, sehingga sifat objek geometris yang ditransformasi adalah *invariant*. Dalam hal ini transformasi affin mempertahankan kesegarisan, kesejajaran, dan perbandingan, namun tidak mengawetkan kesebangunan.

Daftar Pustaka

[1] Berger, Marcel (1987), *Geometry I*, Berlin: Springer, ISBN 3-540-11658-3

[2] Hakan Haberdar (2012), *Affine Transformation Example* , University of Houston. Retrieved March 2012.

[3] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), *Affine Transformation*, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer.

[4] Nomizu, Katsumi; Sasaki, S. (1994), *Affine Differential Geometry* (New ed.), Cambridge University Press.