PERBANDINGAN DUA BUAH MODEL UNTUK DATA BERPASANGAN

Oleh :
Farid H Badruzzaman
Jurusan Matematika Fakultas MIPA
Universitas Islam Bandung
Jln. Tamansari No. 1 Bandung

ABSTRAK

Dari sebuah model matematika akan dihasilkan suatu hasil pendekatan kepada nilai sebenarnya (nilai-nilai empiris). Mencari sebuah model matematika untuk data berpasangan dapat dilakukan dengan metoda least squares atau metoda transformasi least squares (*A First Course In Mathematical Modeling, Frank R.Giardano, U.S. Military Academiy, West Point, New York and Maurice D. Weir, Naral Postgraduate School, West Point, New York)*

Dalam menentukan model yang baik tidaklah mudah. Penulis mencoba menelaah untuk memilih model yang baik dari kedua metoda di atas. (*Probability and Statistics in Engineering and Managment Science, by William W. Hines and Douglas C. Montgomery, Wiley, New York, 1972*).

A. Latar Belakang

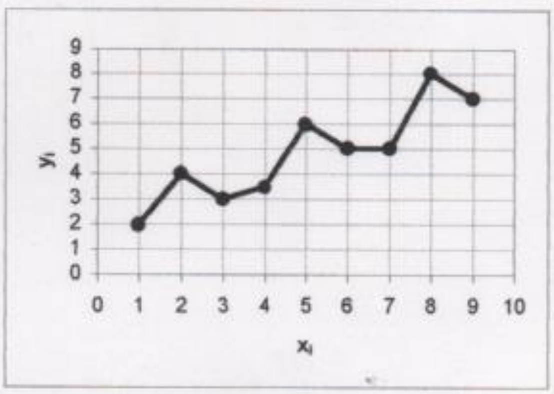
Sebuah model matematika yang diperoleh dari sekumpulan data, tidaklah akan menghasilkan suatu yang eksak. Tetapi akan terdapat beberapa kesalahan.

Umumnya para pengambil keputusan berusaha untuk memilih model yang terbaik yaitu yang tingkat kesalahannya relatif kecil. Namun kenyataannya kadang-kadang bahwa pemilihan tersebut tidak selalu optimum.

Dalam makalah ini hanya akan dibahas tentang pemilihan model untuk data berpasangan. Adapun model yang akan dibandingkan adalah model yang diperoleh dengan cara metoda least squares dan metoda transformasi least squares.

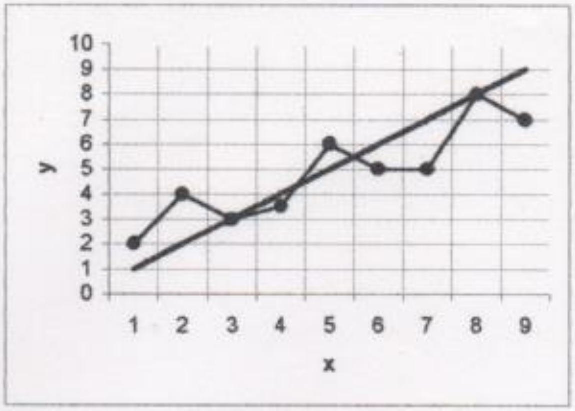
B. Interpretasi Geometri

Misalkan ada sekumpulan data yang merupakan hubungan fungsional antara variabel x dan y. Dalam koordinat kartesius misalkan seperti gambar 1 di bawah ini



Gambar 1

Misalkan model prediksi dari data pada gambar 1 di atas adalah $f(x_i)$ (dia bisa berupa garis lurus atau garis lengkung). Misalkan grafik model prediksinya seperti tampak pada gambar 2 di bawah ini



Gambar 2

Dimana y_i : fungsi hasil observasi
$f(x_i)$: fungsi hasil prediksi

$y_i - f(x_i)$: adalah perbedaan antara hasil observasi dan hasil prediksi

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i)| \text{ ....(1)}$$

dimana :
m : banyaknya data
i : 1, 2, 3, ..., m
y_i : model observasi
$f(x_i)$: model prediksi

C. Metoda Least Squares

Perhatikan persamaan (1). Agar supaya persamaan (1) minimum dapat dilakukan dengan meminimumkan bentuk berikut :

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i)|^2 \text{ ....(2)}$$

1. Garis Lurus

Misalkan model prediksi adalah berupa garis lurus yaitu:

$$f(x) = ax + b \qquad \text{......(3)}$$

Dengan menggunakan metoda least squares, minimumkan bentuk berikut :

$$s = \sum_{i=1}^{m}(y_i - f(x_i)) = \sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_2 - b)^2 \quad \text{....(4)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} &= -2\sum(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} &= -2\sum(y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned} \qquad \text{....(5)}$$

Sistem persamaan pada persamaan (5) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + mb &= \sum y_i \end{aligned} \qquad \text{.....(6)}$$

Dengan menggunakan proses substitusi dan eliminasi maka diperoleh

$$a = \frac{m\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad \text{.....(7)}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad \text{.....(8)}$$

Dengan mensubstitusikan a dan b yang diperoleh dari persamaan (7) dan (8), terhadap persamaan (3) di atas, maka diperoleh fungsi prediksi atau model yang dimaksud.

2. Kurva Lengkung

Jika model prediksinya adalah

$$f(x) = ax^n. \qquad ....(9)$$

Dengan menggunakan metoda least squares, perhatikan bentuk berikut :

$$s = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - f(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - ax_i^n\right)^2 \qquad ....(10)$$

Untuk mencari nilai optimum dari bentuk (10), ambil turunan pertama s terhadap a, dan diperoleh :

$$\frac{ds}{da} = -2\sum\left(y_i - ax_i^n\right)x_i^n = 0 \qquad .....(11)$$

Dari persamaan (10) dapat ditentukan bahwa harga a adalah

$$a = \frac{\sum x_i^n y_i}{\sum x_i^{2n}} \qquad .....(12)$$

Dengan cara yang sama yaitu dengan mensubstitusikan harga a yang diperoleh dari persamaan (12), terhadap persamaan (9) maka dapat ditentukan model prediksinya.

D. Metoda Transformasi Least Squares

Andaikan model prediksinya adalah

$$y = ax^n \qquad ......(13)$$

Dengan mengambil logaritma natural dari persamaan (13) terhadap kedua ruasnya, maka diperoleh

$$\ln y = \ln a + n \ln x \qquad ......(14)$$

Jika $\ln x = 0$, maka $\ln y = \ln a$ atau $y = a$. Persamaan ini berupa garis lurus. Sehingga n dinamakan koefisien arah.

Dengan menganalogikan terhadap persamaan (7) dan (8) dapat ditentukan harga n dan ln a, yaitu

$$n = \frac{m\sum(\ln x_i)(\ln y_i) - \left(\sum \ln x_i\right)\left(\sum \ln y_i\right)}{m\sum(\ln x_i)^2 - \left(\sum \ln x_i\right)^2} \qquad .... (15)$$

$$\text{lin}\alpha = \frac{\sum(\ln x_i)^2 \sum \ln y_i - \sum(\ln x_i)(\ln y_i)\sum \ln x_i}{m\sum(\ln x_i)^2 - \left(\sum \ln x_i\right)^2} \qquad .... (16)$$

E. Contoh Persoalan

Perhatikan data berpasangan berikut :

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y	0,7	3,4	7,2	12,4	20,1

Misalkan model prediksinya adalah $y = ax^2$

$$a = \frac{\sum x_i^2 y_i}{\sum x_i^4} \qquad .... (17)$$

Dari data di atas, dapat ditentukan bahwa

$\Sigma\, x_i^4 = 61,1875$

$\Sigma\, x_i^2 . y_i = 195,0$

$a = 3,1869$

Sebagai model prediksinya adalah $y = 3,1869\, x^2$

Apabila data di atas diselesaikan dengan cara transformasi least squares, maka diperoleh

$\Sigma \ln x_i = 1{,}3217558$
$\Sigma \ln y_i = 8{,}359597801$
$\Sigma (\ln x_i)^2 = 1{,}9648967$
$\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) = 5{,}542315175$

dan dihasilkan

$n = 2{,}062809314$

$\ln.a = 1{,}126612508$
dan $a = 3{,}085190815$

sebagai model prediksinya adalah $y = 3{,}0852\ x^{2{,}0628}$

F. Akurasi Model

Model untuk metoda least squares adalah

$$y_1 = 3{,}1869\ x^2$$

model untuk model transformasi least squares adalah

$$y_2 = 3{,}0852\ x^{2{,}0628}$$

untuk $x = 2{,}25$
$y_1 = 16{,}1337$
$y_2 = 16{,}4348$

G. Kesimpulan

Apabila diperhatikan dari kedua model di atas, maka terdapat perbedaan hasil prediksinya yaitu sebesar 0,3011 jika diberikan harga $x = 2{,}25$.

H. Pustaka

- Frank R. Giardono and Maurice D. Weir, *A First Course m Mathematical Modeling* , Brook/Cole Publishing Company, Monterey California, 1985.