

**PROGRAM TUJUAN GANDA  
DENGAN METODA GOAL PROGRAMMING**

M Yusuf Fajar  
Farid H Badruzzaman  
Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNISBA  
Jalan Tamansari 1 Tlp. (022)4203368 bandung

**Abstrak**

*Dalam kehidupan sehari-hari baik dalam perencanaan perusahaan, perencanaan tata kota ataupun dalam bidang lain, umumnya mempunyai tujuan ganda. Makalah ini membahas masalah yang berkaitan apabila pengambil keputusan dihadapkan pada persoalan yang mengandung beberapa tujuan sebagai target dan sasaran, maka formulasi yang tepat untuk itu adalah program tujuan ganda.*

*Program tujuan ganda dapat diselesaikan dengan goal programming. Dalam program tujuan ganda berusaha untuk meminimumkan deviasi dari berbagai tujuan, sasaran, atau target yang telah ditetapkan.*

*Dari pembahasan terlihat bahwa diantara fungsi tujuan terjadi konflik, artinya tercapainya target suatu fungsi tujuan akan berakibat buruk pada fungsi tujuan lainnya. Hal ini tergantung dari pembobot yang diberikan*

**Kata-kata kunci :** Program linear, goal programming, tujuan ganda.

**A. Latar Belakang**

Dalam program linear yang sudah kita kenal tujuannya adalah ingin meminimumkan atau memaksimumkan satu fungsi tujuan (*single objective function*) terhadap kendala yang terbatas. Dalam dunia nyata banyak masalah yang mempunyai banyak tujuan (*multi objective function*). Oleh karena itu dikembangkan program linear tujuan ganda yang diperkenalkan pertama kali oleh **Charnes** dan **Cooper** pada tahun 1961, kemudian dilanjutkan oleh **Ignizio** (1976). Seringkali terjadi konflik diantara fungsi tujuan tersebut, yaitu perbaikan terhadap satu fungsi tujuan akan berpengaruh buruk terhadap fungsi tujuan yang lain sehingga solusi yang diperoleh berupa solusi kompromi (*compromise solution*). Salah satu metode penyelesaian program tujuan ganda adalah dengan metoda *goal programming*. Pada *goal programming* bertujuan untuk meminimumkan jarak antara tujuan dengan target yang telah ditentukan atau meminimumkan deviasi dari berbagai tujuan.

**B. Model dan Perumusannya**

Model umum program tujuan ganda adalah sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan } f(\bar{x}) = \{f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})\}$$

Dengan kendala :

$$A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq 0$$

Dimana :

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}; \bar{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$$

$$f_i(\bar{x}) = \bar{C}_i^T \bar{x} \text{ adalah fungsi objektif ke-}i$$

Andaikan target dari masing-masing fungsi tujuan  $f_i$  ditentukan, yaitu  $f_i$ . Titik reference (goal) dapat dinotasikan sebagai berikut :

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_k]^T$$

Untuk menentukan jawab dari model di atas, salah satunya akan diselesaikan dengan meminimumkan jarak deviasi antara fungsi tujuan dengan target yang telah ditetapkan yaitu :

$$\text{Minimumkan } Z = \sum_{i=1}^m W_i (d_i^+ + d_i^-)$$

Dengan kendala :

$$f_i(\bar{x}) - d_i^+ + d_i^- = f_i \ ; i = 1, 2, \dots, k$$

$$d_i^+ \times d_i^- = 0 \ ; i = 1, 2, \dots, k$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0 \ ; i = 1, 2, \dots, k$$

$$A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq 0$$

Dengan :

$d_i^+$  dan  $d_i^-$  : jumlah unit deviasi yang kekurangan (-) atau kelebihan (+) terhadap tujuan

$W_i^+$  dan  $W_i^-$  : Pembobot yang diberikan terhadap suatu unit deviasi yang kekurangan (-) atau kelebihan (+)

**C. Contoh Permasalahan**

Akan dilihat contoh permasalahan sederhana program tujuan ganda berikut ini :

$$\text{Maksimumkan } z = \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 5x_1 - 2x_2 \\ f_2(\bar{x}) = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Dengan kendala :

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Andaikan target dari tujuan pertama dan kedua adalah  $f_1(\bar{x}) = 27$  dan  $f_2(\bar{x}) = 14.4$

Misalkan  $W_1$  dan  $W_2$  adalah pembobot dari  $f_1(\bar{x})$  dan  $f_2(\bar{x})$ . Model goal programming diformulasikan sebagai berikut :

$$\text{Min } z = w_1(d_1^+ + d_1^-) + w_2(d_2^+ + d_2^-) \dots\dots\dots (C.1)$$

Dengan kendala :

$$f_1(x) - d_1^+ + d_1^- = f_1$$

$$f_2(x) - d_2^+ + d_2^- = f_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Misal  $w_1 > 0$  ;  $w = \frac{w_1}{w_2}$

Persamaan (C.1) dibagi dengan  $w_2$ , maka diperoleh

$$\text{Min } z = w(d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-)$$

Dengan kendala :

$$5x_1 - 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 27$$

$$-x_1 + 4x_2 + d_2^- - d_2^+ = 14.4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 3$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 8$$

$$x_1 + s_3 = 6$$

$$x_2 + s_4 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dengan menggunakan metoda simplek dapat ditentukan tabel awal simplek sebagai berikut :

Tabel awal metoda simplek dari persoalan di atas adalah

Basis	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_2^-$	$d_1^+$	$d_2^+$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solusi
z	$5w-1$	$-2w+4$	0	0	$-2w$	2	0	0	0	0	$27w+14.4$
$d_1^-$	5	-2	1	0	-1	0	0	0	0	0	27
$d_2^-$	-1	4	0	1	0	-1	0	0	0	0	14.4
$s_1$	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	3
$s_2$	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	8
$s_3$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6
$s_4$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4

Tabel optimal dari persoalan di atas untuk pembobot :  $0 \leq w \leq \frac{1}{5}$  adalah

Basis	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_2^-$	$d_1^+$	$d_2^+$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solusi
z	0	0	0	$5w-1$	$-2w$	$-5w-1$	0	0	0	$-18w$	$27w$
$d_1^-$	0	0	1	5	-1	-5	0	0	0	-18	27
$x_1$	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	4	1.6
$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4
$s_2$	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	5	2.4
$s_3$	0	0	0	1	0	-1	0	0	1	-4	4.4
$s_4$	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	3	0.6

Diperoleh hasil  $x_1 = 1.6$  ;  $x_2 = 4$  , dan  $d_1^- = 27$

$$f_1(\bar{x}) = 5(1.6) - 2(4) = 0 ; f_2(\bar{x}) = -1.6 + 4(4) = 14.4$$

Fungsi tujuan pertama jauh dari target yang telah ditetapkan, sedangkan fungsi tujuan yang ke-2 mencapai target yang telah ditetapkan.

Tabel optimal dari persoalan di atas untuk pembobot :  $\frac{1}{5} < w < \frac{5}{7}$  adalah

Basis	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_2^-$	$d_1^+$	$d_2^+$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solusi
Z	0	0	0	0	$-2w$	-2	0	$1-5w$	0	$7w-5$	$2.4+15w$
$d_1^-$	0	0	1	0	-1	0	0	-5	0	7	15
$x_1$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	4
$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4
$d_2^-$	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	5	2.4
$s_3$	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	2
$s_1$	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	2	3

Diperoleh hasil  $x_1 = 4$  ;  $x_2 = 4$  , dan  $d_1^- = 15$  ;  $d_2^- = 2.4$

$$f_1(\bar{x}) = 5(4) - 2(4) = 12 ; f_2(\bar{x}) = -4 + 4(4) = 12$$

Fungsi tujuan pertama kurangnya 15 dari target yang telah ditetapkan, sedangkan fungsi tujuan yang ke-2 kurangnya 2.4 dari target yang telah ditetapkan.

Tabel optimal dari persoalan di atas untuk pembobot :  $\frac{5}{7} < w < 2$  adalah

Basis	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_2^-$	$d_1^+$	$d_2^+$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solusi
Z	0	0	0	0	-2w	-2	0	2w-4	5-7w	0	12.4+w
$d_1^-$	0	0	1	0	-1	0	0	2	-7	0	1
$x_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6
$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	2
$d_2^-$	0	0	0	1	0	-1	0	-4	5	0	12.4
$s_4$	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	2
$s_1$	0	0	0	0	0	0	1	-1	2	0	7

Diperoleh hasil  $x_1 = 6$  ;  $x_2 = 2$ , dan  $d_1^- = 1$  ;  $d_2^- = 12.4$

$$f_1(\bar{x}) = 5(6) - 2(2) = 26 ; f_2(\bar{x}) = -6 + 4(2) = 2$$

Fungsi tujuan pertama dekat dari target yang telah ditetapkan, sedangkan fungsi tujuan yang ke-2 jauh dari target yang telah ditetapkan.

Tabel optimal dari persoalan di atas untuk pembobot :  $w > 2$  adalah

Basis	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_2^-$	$d_1^+$	$d_2^+$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solusi
Z	0	0	2-w	0	-2-w	-2	0	0	-9	0	14.4
$s_2$	0	0	0.5	0	-0.5	0	0	1	-3.5	0	0.5
$x_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6
$x_2$	0	1	-0.5	0	0.5	0	0	0	2.5	0	1.5
$d_2^-$	0	0	2	1	-2	-1	0	0	-9	0	14.4
$s_4$	0	0	0.5	0	-0.5	0	0	0	-2.5	1	2.5
$s_1$	0	0	0.5	0	-0.5	0	1	0	-1.5	0	7.5

Diperoleh hasil  $x_1 = 6$  ;  $x_2 = 1.5$ , dan ;  $d_2^- = 14.4$

$$f_1(\bar{x}) = 5(6) - 2(1.5) = 27 ; f_2(\bar{x}) = -6 + 4(1.5) = 0$$

Fungsi tujuan pertama tercapai dari target yang telah ditetapkan, sedangkan fungsi tujuan yang ke-2 jauh dari target yang telah ditetapkan.

### Kesimpulan

Disini terlihat bahwa dari fungsi tujuan pertama dan kedua terjadi konflik artinya bahwa tercapainya target pertama tidak dibarengi oleh tercapainya target fungsi tujuan yang kedua. Demikian sebaliknya. Hal ini tergantung dari pembobot yang diberikan.

### Daftar Pustaka :

1. Charnes, A and Cooper, W.W., " Goal programming and multiple objective optimisation -part I", European Journal of Operational Research, 1 (1977) 39-54
2. Ignizio, James P., 1982, " Linear Programming in Single and Multiple Objective System", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, London
3. ShiFang yang and J B Yang, Full Paper, Minimax Goal Programming Managerial Decision Making, <http://www.sm.umist.ac.uk/abstract/wp2004.htm>