Jurnal Matematika Vol. 18, No. 1, Mei 2019
ISSN: 1412-5056 / 2598-8980
http://ejournal.unisba.ac.id

Diterima: 24/01/2019
Disetujui: 03/05/2019
Publikasi Online: 30/05/2019

Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Adomian Decomposition Method dan Variational Iteration Method

The solution of Riccati Fractional Differential Equation using Adomian Decomposition method

Muhamad Deni Johansyah[*1], Herlina Napitupulu[2], Erwin Harahap[3], Ira Sumiati[4], Asep K. Supriatna[5]

[1,2,4,5]Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran
[3]Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Islam Bandung

[*]muhamad.deni@unpad.ac.id

Abstrak. Pada umumnya orde dari persamaan diferensial adalah bilangan asli, namun orde pada persamaan diferensial dapat dibentuk menjadi orde pecahan yang disebut persamaan diferensial fraksional. Paper ini membahas persamaan diferensial fraksional Riccati dengan orde diantara nol dan satu, dan koefisien konstan. Metode numerik yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati adalah *Adomian Decomposition Method* (ADM) dan *Variational Iteration Method* (VIM). Tujuan dari paper ini adalah untuk memperluas penerapan ADM dan VIM dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati nonlinear dengan turunan Caputo. Perbandingan solusi yang diperoleh menunjukkan bahwa VIM adalah metode yang lebih sederhana untuk mencari solusi persamaan diferensial fraksional Riccati nonlinier dengan orde antara nol dan satu, kemudian hasil yang diperoleh disajikan dalam bentuk grafik.

Kata kunci: diferensial, fraksional, riccati, adomian dekomposisi

Abstract. Generally, the order of differential equations is a natural numbers, but this order can be formed into fractional, called as fractional differential equations. In this paper, the Riccati fractional differential equations with order between zero and one, and constant coefficient is discussed. The numerical methods used to obtain solutions from Riccati fractional differential equations are the Adomian Decomposition Method (ADM) and Variational Iteration Method (VIM). The aim of this paper is to expand the application of ADM and VIM in solving nonlinear Riccati fractional differential equations with Caputo derivatives. The comparison of the obtained solutions shows that VIM is simpler method for finding solutions to Riccati nonlinear fractional differential equations with order between zero and one. The obtained results are presented graphically.

Keywords: riccati, fractional, differential, adomian, decomposition

1. Pendahuluan

Dalam beberapa tahun terakhir, kalkulus fraksional diterapkan diberbagai bidang seperti jaringan listrik, teori kontrol sistem dinamis, probabilitas dan statistik, elektrokimia korosi, fisika kimia, optik, teknik, akustik, viskoelastisitas, ilmu material dan pemrosesan sinyal yang dimodelkan oleh persamaan diferensial berorde fraksional linier atau nonlinear [1-5]. Seperti diketahui, persamaan diferensial Riccati berkaitan dengan aplikasi dalam pembentukan model dynamic games, sistem linier dengan lompatan Markovian, aliran sungai, model ekonometrik, kontrol stokastik, teori masalah difusi, dan penanaman modal [6-10]. Banyak penelitian telah dilakukan untuk mencari solusi persamaan diferensial Riccati berode bilangan asli antara lain *Homotopy Perturbation Method* (HPM) [11-13], *Homotopy Analysis Method* (HAM) [14] dan *Variational Iteration Method* (VIM) yang dibahas oleh Abbasbandy [15]. Adapun untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati non-linear dengan menggunakan HPM dibahas oleh Khan et al [16], sedangkan dengan menggunakan

VIM oleh Jafari dan Tajadodi [17] dan dengan menggunakan Adomian Decomposition Method (ADM) dibahas oleh Momani dan Sawagfeh [18].

ADM pertama kali diperkenalkan oleh George Adomian untuk menyelesaikan sistem persamaan stokastik. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan integral, diferensial dan integral-diferensial. Persamaan diferensial biasa atau parsial yang dapat diselesaikan dengan metode ini dapat berorde bilangan bulat atau fraksional, dengan masalah nilai awal atau batas, dengan koefesien variabel atau konstanta, linear atau nonlinear, homogen atau nonhomogen [19, 20]. ADM dengan turunan fraksional Caputo dapat menyelesaikan persamaan *Korteweg de Vries* [21]. VIM yang dibahas oleh He [22, 23], berhasil diterapkan pada persamaan diferensial biasa dan parsial. He [24] adalah orang pertama yang menerapkan VIM untuk mencari solusi persamaan diferensial fraksional [26].

Dalam paper ini, kami memperluas penerapan ADM dan VIM untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial fraksional Riccati nonlinear dengan koefesien konstan:

$$D_{0+}^{\alpha}Y(t)=\lambda_1 Y^2(t)+\lambda_2 Y(t)+\lambda_3, \qquad t\in R, 0<\alpha\le 1, t>0, \tag{1}$$

dengan syarat awal

$$y^{(k)}(0)=d_k, \quad k=0,1,2,...,n-1.$$

di mana α adalah orde turunan fraksional, n adalah bilangan bulat, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, dan d_k adalah konstanta. Tujuan dari paper ini adalah untuk memperluas penerapan ADM dan VIM dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati nonlinear dengan turunan Caputo. Paper ini disusun sebagai berikut: Bagian 1 membahas latar belakang persamaan diferensial fraksional Riccati, penerapan ADM dan VIM. Bagian 2 menyajikan definisi terkait dengan teori kalkulus fraksional secara singkat. Bagian 3 menyajikan prosedur solusi menggunakan ADM dan VIM. Bagian 4 menyajikan penerapan ADM dan VIM untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati nonlinear dengan turunan Caputo, serta grafik dari solusi numerik. Bagian 5 adalah simpulan.

2. Tinjauan Pustaka

Definisi 2.1. *Misalkan α bilangan real, integral fraksional orde α dari fungsi* $f(x)$ *adalah* [25]

$$\begin{aligned} J^{\alpha} f(x) &= D^{-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\alpha>0$.

Sedangkan untuk $\alpha\ge 0$ dan $\beta\ge 0$, integral fraksional yang dikemukakan Riemann-Liouville memiliki sifat sebagai berikut:

(1) $J^{\alpha}J^{\beta}f(x)=J^{\alpha+\beta}f(x),$

(2) $J^{\alpha}J^{\beta}f(x)=J^{\beta}J^{\alpha}f(x).$

Definisi 2.1 mempunyai arti bahwa notasi integral fraksional berorde α dengan batas bawah $x_0=0$ dari fungsi $f(x)$ ditulis sebagai $J^{\alpha}f(x)$. Integral fraksional berorde α adalah anti turunan fraksional berorde (-α) untuk fungsi $f(x)$ yang ditulis sebagai $D^{-\alpha}f(x)$, sehingga berlaku

$J^{\alpha} f(x) = D^{-\alpha} f(x)$ dengan D^{α} adalah operator turunan fraksional berorde *α* dengan batas bawah $x_0 = 0$.

Definisi 2.2. *Turunan fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai* [25]

$$D_{x_0}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[J^{n-\alpha} f(x)\right], \tag{3}$$

$$D_{x_0}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n}\left[\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right], \tag{4}$$

dengan α orde sebarang, $n-1 \le \alpha < n, n \in Z^{+}$, *$x_0$ batas bawah,* $x_0 < x, x > 0$.

Berikut ini adalah beberapa sifat turunan fraksional:

(1) $D^{\alpha+\beta} f(x) = D^{\alpha} D^{\beta} f(x),$

(2) $D^{\alpha}(\lambda f(t)) = \lambda D^{\alpha}(f(t)),$

(3) $D^{\alpha}(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 D^{\alpha} f(x) + \lambda_2 D^{\alpha} g(x).$

Teorema 2.1. *Integral fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk* $f(x) = x^m$ *adalah* [25]

$$J^{\alpha} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} x^{m+\alpha} \tag{5}$$

untuk $\alpha > 0, m > -1, x > 0$.

Fungsi turunan fraksional bisa diartikan dengan menggunakan definisi integrasi fungsi, karena Definisi 2.1 mempunyai arti bahwa notasi integral fraksional berorde *α* dari fungsi $f(x)$ adalah anti turunan fraksional berorde (-*α*) untuk fungsi $f(x)$ yang ditulis sebagai $D^{-\alpha} f(x)$, sehingga berlaku $J^{\alpha} f(x) = D^{-\alpha} f(x)$. Sampai saat ini, asumsi bahwa $\alpha = n - u$, dimana $0 < \alpha < 1$ dan *n* adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari *u*. Lalu, fungsi turunan $f(x)$ dari urutan *u* adalah:

$$D^{u} f(x) = D^{n}\left[D^{-\alpha} f(x)\right]. \tag{6}$$

Teorema 2.2. *Turunan fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk* $f(x) = x^m$ *adalah* [25]

$$D^{\alpha} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha} \tag{7}$$

untuk $0 < \alpha < 1, m \ge 0$.

Perhatikan bahwa hubungan antara operator Riemann-Liouville dan operator diferensial fraksional Caputo diberikan sebagai berikut:

$$J^{\alpha} D_x^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0), \qquad n-1 < \alpha \le n.$$

3. Iterative Method

3.1. Adomian Decomposition Method (ADM)

Diberikan persamaan

$$Mu + Nu + Ru = g, \tag{8}$$

dimana M adalah operator linear yang dapat diinverskan, N operator nonlinear dan R bagian linear yang tersisa. Persamaan (8) dapat ditulis kembali dengan Mu sebagai subjeknya

$$Mu = g - Nu - Ru. \tag{9}$$

Karena M dapat dinverskan, didefinisikan operator invers dari M adalah M^{-1}. Jika M adalah operator diferensial maka M^{-1} adalah operator intergral, sehingga apabila kedua ruas persamaan (9) diintegralkan oleh M^{-1} diperoleh

$$\begin{aligned} M^{-1}Mu &= M^{-1}(g - Nu - Ru) \\ u - \phi &= M^{-1}g - M^{-1}Nu - M^{-1}Ru \\ u &= \phi + M^{-1}g - M^{-1}Nu - M^{-1}Ru. \end{aligned} \tag{10}$$

Metode dekomposisi Adomian mengasumsikan bahwa fungsi u dapat diuraikan menjadi deret tak hingga

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Leftrightarrow u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{11}$$

dimana u_n dapat ditentukan secara rekursif. Selain itu, metode ini juga mengasumsikan operator nonlinear Nu dapat didekomposisi dengan deret polinom tak hingga

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{12}$$

dimana $A_n = A_n(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ adalah polinom Adomian yang didefinisikan

$$A_n(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}; \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

dengan λ adalah parameter, polinom Adomian A_n dapat diuraikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{0!}\frac{d^0}{d\lambda^0}\left[N\left(\sum_{k=0}^{0}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} = N(u_0),\\
A_1 &= \frac{1}{1!}\frac{d^1}{d\lambda^1}\left[N\left(\sum_{k=0}^{1}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} = u_1 N'(u_0),\\
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{d^{21}}{d\lambda^2}\left[N\left(\sum_{k=0}^{2}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{u_1^{\;2}}{2!}N''(u_0)+u_2 N'(u_0),\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Substitusi persamaan (11) dan (12) ke persamaan (10)

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n = \phi + M^{-1}g - M^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right) - M^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}Ru_n\right) \qquad (13)$$

atau ekuivalen dengan

$$u_0+u_1+u_2+\cdots = \phi + M^{-1}g - M^{-1}(A_0+A_1+A_2+\cdots) - M^{-1}(Ru_0+Ru_1+Ru_2+\cdots)$$

dengan demikian diperoleh relasi rekursif

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \phi + M^{-1}g,\\
u_{n+1} &= -M^{-1}A_1(u_0,u_1,\ldots u_n) - M^{-1}Ru_n.
\end{aligned} \qquad (14)
$$

3.2. ***Variational Iteration Method (VIM)***

Persamaan nonlinear merupakan salah satu jenis persamaan selain persamaan linear. Faktanya, persamaan nonlinear terbilang sangat sulit untuk diselesaikan atau diaproksimasikan solusinya. Variational Iteration Method kemudian muncul sebagai salah satu metode yang telah berhasil diaplikasikan ke persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Pada penelitian kali ini, Variational Iteration Method akan diterapkan ke persamaan diferensial fraksional nonlinear guna mendapatkan hasil aproksimasi dari solusinya.

Berdasarkan persamaan diferensial fraksional nonlinear Riccati (1), menurut Variational Iteration Method, kita harus membangun sebuah fungsi koreksi untuk (1) yaitu

$$Y_{n+1} = Y_n + J^{\alpha}\lambda(\xi)\left[\frac{d^{\alpha}Y_n(t)}{dt^{\alpha}} - \lambda_1 Y_n^{\;2}(t) - \lambda_2 Y_n(t) - \lambda_3\right]. \qquad (15)$$

Untuk mengidentifikasi nilai dari Lagrange Multiplier $\lambda(\xi)$, maka persamaan tersebut dapat diaproksimasi menjadi

$$Y_{n+1} = Y_n + \int_0^t \lambda(\xi)\left[\frac{dY_n(\xi)}{dt\xi} - \lambda_1\tilde{Y}_n^{\,2}(\xi) - \lambda_2\tilde{Y}_n(\xi) - \lambda_3\right]d\xi,$$

dimana $\lambda(\xi)$ adalah Lagrange Multiplier dan dapat diidentifikasi secara optimal dengan teori variasi, dan $\tilde{Y}_n$ adalah variasi terbatas yang berupa atau berperilaku sebagai konstanta sehingga $\delta\tilde{Y}_n = 0$. Selanjutnya persamaan di atas akan diturunkan terhadap Y_n, sehingga diperoleh

$$\frac{\delta Y_{n+1}}{\delta Y_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\left[\frac{dY_n(\xi)}{d\xi} - \lambda_1 \tilde{Y}_n^{\,2}(\xi) - \lambda_2 \tilde{Y}_n(\xi) - \lambda_3\right] d\xi = 0$$

$$= 1 + \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\frac{dY_n(\xi)}{d\xi}\,d\xi - \int_0^t \lambda(\xi)\lambda_1 \frac{\delta \tilde{Y}_n^{\,2}(\xi)}{\delta Y_n}\,d\xi - \int_0^t \lambda(\xi)\lambda_2 \frac{\delta \tilde{Y}_n(\xi)}{\delta Y_n}\,d\xi - \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\lambda_3\,d\xi = 0$$

$$= 1 + \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\frac{dY_n(\xi)}{d\xi}\,d\xi = 0$$

atau ekuivalen dengan

$$\delta Y_{n+1} = \delta Y_n + \delta\int_0^t \lambda(\xi)\frac{dY_n(\xi)}{d\xi}\,d\xi = 0\,,$$

sehingga dengan menggunakan integral parsial diperoleh

$$\delta Y_{n+1} = \left(1 + \lambda\big|_{\xi=t}\right)\delta Y_n - \int_0^t \delta Y_n \lambda'(\xi)\,d\xi = 0\,,$$

maka diperoleh

$$1 + \lambda\big|_{\xi=t} = 0 \text{ dan } \lambda'\big|_{\xi=t} = 0\,.$$

Dengan demikian diperoleh $\lambda(\xi) = -1$, maka solusi persamaan (1) adalah sebagai berikut

$$Y_{n+1} = Y_n - J^{\alpha}\left[D_{0+}^{\alpha} Y_n(t) - \lambda_1 Y_n^{\,2}(t) - \lambda_2 Y_n(t) - \lambda_3\right]. \tag{16}$$

4. Hasil dan Pembahasan

Misal diberikan persamaan diferensial fraksional Riccati sebagai berikut

$$D_{0+}^{\alpha} Y(t) = \lambda_1 Y^2(t) + \lambda_2 Y(t) + \lambda_3, \qquad t \in R, 0 < \alpha \le 1, t > 0, \lambda_1 \ne 0,$$

dengan syarat awal

$$y^{(k)}(0) = d_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

di mana α adalah orde turunan fraksional, n adalah bilangan bulat, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan d_k adalah konstanta.

Pada paper ini, untuk mencari solusi persamaan diferensial fraksional Riccati digunakan dua metode, yaitu Adomian Decomposition Method (ADM) dan Variational Iteration Method (VIM) sebagai berikut.

4.1. Menggunakan ADM

Misalkan $MY = D^{\alpha} Y$, sehingga invers dari *M* adalah $M^{-1} = J^{\alpha}$, dengan demikian apabila kedua ruas persamaan (1) diintegralkan diperoleh

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\left(D_{0+}^{\alpha}Y(t)\right) &= J^{\alpha}\lambda_1 Y^2(t) + J^{\alpha}\lambda_2 Y(t) + J^{\alpha}\lambda_3 \\ Y(t) &= Y(0) + J^{\alpha}\lambda_1 Y^2(t) + J^{\alpha}\lambda_2 Y(t) + J^{\alpha}\lambda_3. \end{aligned} \tag{17}$$

ADM mengasumsikan bahwa $Y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t)$ sedangkan bentuk nonlinear $Y^2(t)=NY=\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dengan $A_n = A_n\left(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$ adalah polinom Adomian, sehingga persamaan (17) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t) = Y(0) + \lambda_1 J^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) + \lambda_2 J^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t)\right) + J^{\alpha}\lambda_3$$

dengan demikian diperoleh solusi numerik dari persamaan (1) dengan syarat awal $Y(0)=0$ adalah

$$\begin{aligned} Y_0 &= J^{\alpha}\lambda_3 = \lambda_3 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ Y_{n+1} &= \lambda_1 J^{\alpha} A_n + \lambda_2 J^{\alpha} Y_n, \qquad n = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

dengan

$$A_0 = N(Y_0) = Y_0^{\,2} = \lambda_3^{\,2} \frac{t^{2\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}$$

$$Y_1 = \lambda_1 J^{\alpha} A_0 + \lambda_2 J^{\alpha} Y_0 = \lambda_1 \lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2} + \lambda_2\lambda_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

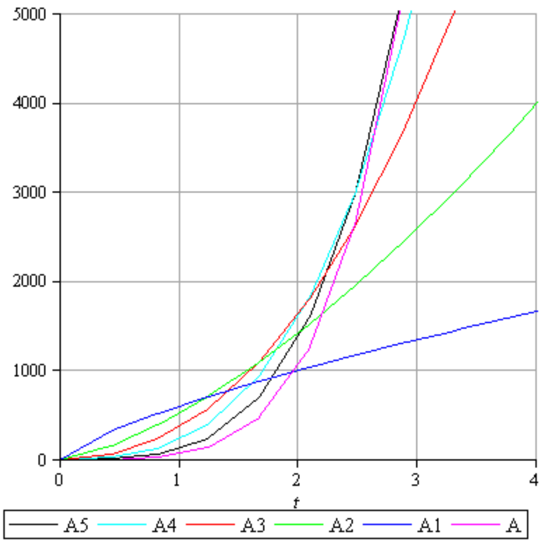
$$A_1 = 2Y_0Y_1 = 2\lambda_1\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^3} + 2\lambda_2\lambda_3^{\,3} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= \lambda_1 J^{\alpha} A_1 + \lambda_2 J^{\alpha} Y_1 \\ &= 2\lambda_1^{\,2}\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^3} + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(3\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} \\ &\quad + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2} + \lambda_2^{\,2}\lambda_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \end{aligned}$$

dengan demikian solusi umum dari persamaan diferensial fraksional Riccati tersebut adalah

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots \\ &= \lambda_3 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \lambda_1\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2} + \lambda_2\lambda_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ &\quad + 2\lambda_1^{\,2}\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^3} \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(3\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} \\ &\quad + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2} + \lambda_2^{\,2}\lambda_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Adapun grafik solusi persamaan Riccati fraksional dengan menggunakan ADM sebagai berikut. Jika diberikan $\alpha = \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$ dan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, maka grafik solusi dari persamaan Riccati pada (18) disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik solusi $Y(t)$ menggunakan ADM dengan A1 ($\alpha = 1/6$), A2 ($\alpha = 2/6$), A3 ($\alpha = 3/6$), A4 ($\alpha = 4/6$), A5 ($\alpha = 5/6$), A($\alpha = 1$).

4.2. Menggunakan VIM

Berdasarkan Variational Iteration Method persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$Y_{n+1} = Y_n + J^{\alpha}\lambda(\xi)\left[\frac{d^{\alpha}Y_n(t)}{dt^{\alpha}} - \lambda_1 Y_n^{\,2}(t) - \lambda_2 Y_n(t) - \lambda_3\right].$$

Untuk mengidentifikasi nilai dari Lagrange Multiplier $\lambda(\xi)$, maka persamaan tersebut dapat diaproksimasi menjadi

$$Y_{n+1} = Y_n + \int_0^t \lambda(\xi)\left[\frac{dY_n(\xi)}{dt\xi} - \lambda_1 \tilde{Y}_n^{\,2}(\xi) - \lambda_2 \tilde{Y}_n(\xi) - \lambda_3\right]d\xi,$$

dimana $\lambda(\xi)$ adalah Lagrange Multiplier dan dapat diidentifikasi secara optimal dengan teori variasi, dan $\tilde{Y}_n$ adalah variasi terbatas yang berupa atau berperilaku sebagai konstanta sehingga $\delta\tilde{Y}_n = 0$. Selanjutnya persamaan di atas akan diturunkan terhadap Y_n, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Y_{n+1}}{\delta Y_n} &= 1 + \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\left[\frac{dY_n(\xi)}{d\xi} - \lambda_1 \tilde{Y}_n^{\,2}(\xi) - \lambda_2 \tilde{Y}_n(\xi) - \lambda_3\right]d\xi = 0 \\
&= 1 + \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\frac{dY_n(\xi)}{d\xi}d\xi - \int_0^t \lambda(\xi)\lambda_1 \frac{\delta\tilde{Y}_n^{\,2}(\xi)}{\delta Y_n}d\xi - \int_0^t \lambda(\xi)\lambda_2 \frac{\delta\tilde{Y}_n(\xi)}{\delta Y_n}d\xi - \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\lambda_3 d\xi = 0 \\
&= 1 + \frac{\delta}{\delta Y_n}\int_0^t \lambda(\xi)\frac{dY_n(\xi)}{d\xi}d\xi = 0
\end{aligned}$$

atau ekuivalen dengan

$$\delta Y_{n+1} = \delta Y_n + \delta \int_0^t \lambda(\xi) \frac{dY_n(\xi)}{d\xi} d\xi = 0 ,$$

sehingga dengan menggunakan integral parsial diperoleh

$$\delta Y_{n+1} = \left(1 + \lambda\big|_{\xi=t}\right)\delta Y_n - \int_0^t \delta Y_n \lambda'(\xi) d\xi = 0 ,$$

maka diperoleh

$$1 + \lambda\big|_{\xi=t} = 0 \text{ dan } \lambda'\big|_{\xi=t} = 0 .$$

Dengan demikian diperoleh $\lambda(\xi) = -1$, maka solusi persamaan (1) adalah sebagai berikut

$$Y_{n+1} = Y_n - J^{\alpha}\left[D_{0+}^{\alpha} Y_n(t) - \lambda_1 Y_n^{\,2}(t) - \lambda_2 Y_n(t) - \lambda_3\right].$$

dengan D_{0+}^{α} operator derivatif fraksional berorde α dengan batas bawah $x_0 = 0^+$ x_0=0^+ dan solusi awal yang dipilih adalah $Y(0) = 0$. Sehingga proses iterasi selanjutnya adalah sebagai berikut:

$$Y_1 = Y_0 - J^{\alpha}\left[D_{0+}^{\alpha} Y_0(t) - \lambda_1 Y_0^{\,2}(t) - \lambda_2 Y_0(t) - \lambda_3\right] = J^{\alpha}\lambda_3 = \lambda_3 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$Y_2 = Y_1 - J^{\alpha}\left[D_{0+}^{\alpha} Y_1(t) - \lambda_1 Y_1^{2}(t) - \lambda_2 Y_1(t) - \lambda_3\right]$$

$$= \lambda_3 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \lambda_2\lambda_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \lambda_1\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2 \Gamma(3\alpha+1)}$$

$$Y_3 = Y_2 - J^{\alpha}\left[D_{0+}^{\alpha} Y_2(t) - \lambda_1 Y_2^{\,2}(t) - \lambda_2 Y_2(t) - \lambda_3\right]$$

$$= \lambda_1\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2 \Gamma(3\alpha+1)} + \lambda_1\lambda_2^{\,2}\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\left(\Gamma(2\alpha+1)\right)^2 \Gamma(5\alpha+1)}$$

$$+ \lambda_1^{\,3}\lambda_3^{\,4} \frac{\Gamma(6\alpha+1)\left(\Gamma(2\alpha+1)\right)^2 t^{7\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^4 \left(\Gamma(3\alpha+1)\right)^2 \Gamma(7\alpha+1)} + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(3\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}$$

$$+ 2\lambda_1^{\,2}\lambda_2\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(5\alpha+1)t^{6\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2 \Gamma(3\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)} + 2\lambda_1^{\,2}\lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{6\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^3 \Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)}$$

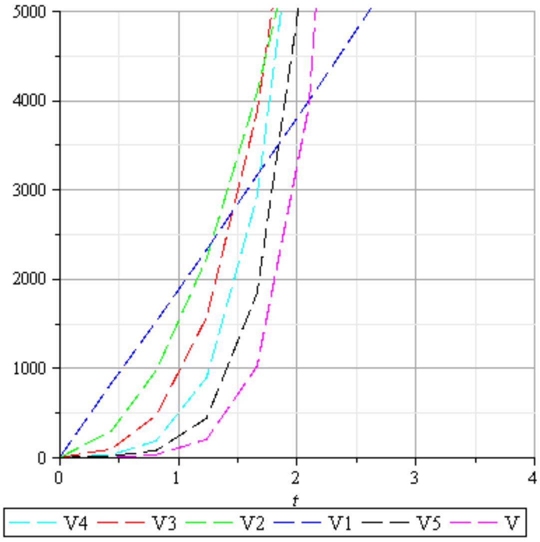
$$+ \lambda_2\lambda_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \lambda_2^{\,2}\lambda_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + +\lambda_1\lambda_2\lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2 \Gamma(4\alpha+1)} + \lambda_3 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Sehingga solusi dari persamaan di atas adalah $Y(t) \cong Y_3(t)$ dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ adalah konstanta, yaitu sebagai berikut

 ISSN: 1412-5056 | 2598-8980

$$
\begin{aligned}
Y(t) \cong Y_3(t) = {} & \lambda_1 \lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1))^2 \Gamma(3\alpha+1)} + \lambda_1 \lambda_2^{\,2} \lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{(\Gamma(2\alpha+1))^2 \Gamma(5\alpha+1)} \\
& + \lambda_1^{\,3} \lambda_3^{\,4} \frac{\Gamma(6\alpha+1)(\Gamma(2\alpha+1))^2 t^{7\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1))^4 (\Gamma(3\alpha+1))^2 \Gamma(7\alpha+1)} + 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(3\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} \\
& + 2\lambda_1^{\,2} \lambda_2 \lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(5\alpha+1)t^{6\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1))^2 \Gamma(3\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)} + 2\lambda_1^{\,2} \lambda_3^{\,3} \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{6\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1))^3 \Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \\
& + \lambda_2 \lambda_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \lambda_2^{\,2} \lambda_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^{\,2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1))^2 \Gamma(4\alpha+1)} + \lambda_3 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

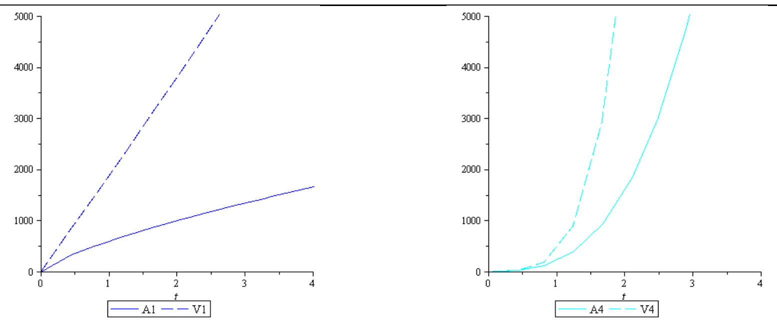
Adapun grafik solusi persamaan Riccati fraksional dengan menggunakan VIM sebagai berikut. Jika diberikan $\alpha = \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$ dan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, maka grafik solusi dari persamaan Riccati pada (19) disajikan pada Gambar 2.



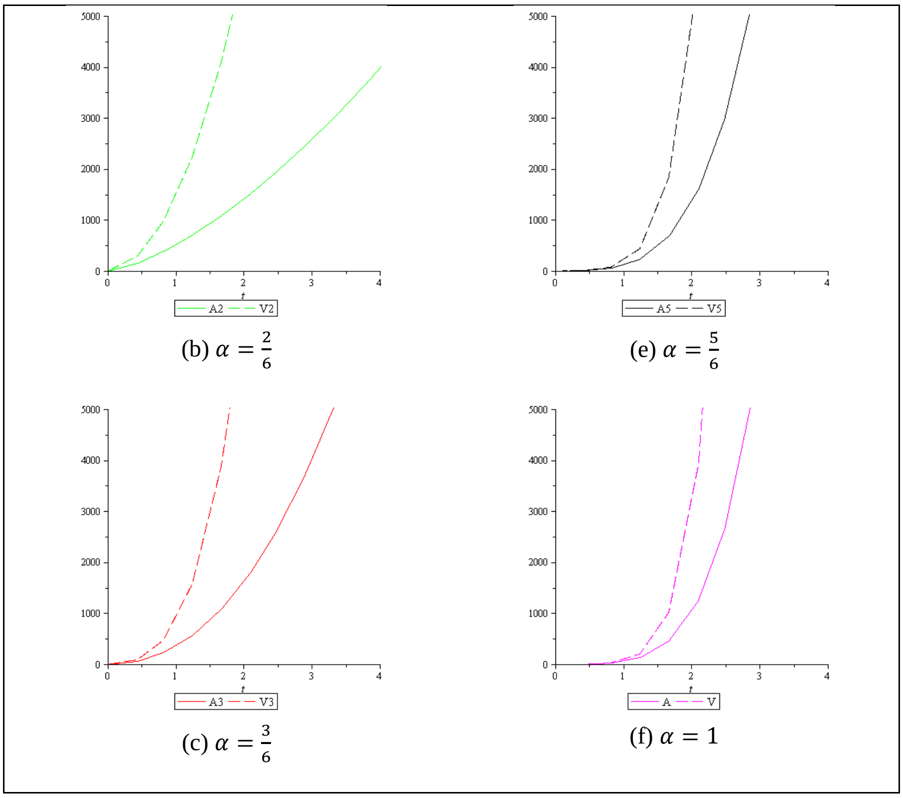
Gambar 2. Grafik solusi $Y(t)$ menggunakan VIM dengan V1 ($\alpha = 1/6$), V2 ($\alpha = 2/6$), V3 ($\alpha = 3/6$), V4 ($\alpha = 4/6$), V5 ($\alpha = 5/6$), V($\alpha = 1$).

4.3. Perbandingan Grafik Solusi

Berikut disajikan perbandingan grafik solusi persamaan diferensial fraksional Riccati dengan menggunakan ADM dan VIM.



(a) $\alpha = \frac{1}{6}$ (d) $\alpha = \frac{4}{6}$



(b) $\alpha = \frac{2}{6}$ (e) $\alpha = \frac{5}{6}$

(c) $\alpha = \frac{3}{6}$ (f) $\alpha = 1$

Gambar 3. Perbandingan grafik solusi $Y(t)$ antara metode ADM dan VIM.

5. Kesimpulan

Dalam paper ini, kami membandingkan solusi numerik persamaan diferensial fraksional Riccati berorde $0<\alpha\leq 1$ dan koefesien konstan menggunakan *Adomian Decomposition Method* (ADM) dan *Variational Iteration Method* (VIM) dengan konsep turunan Caputo. Perbandingan solusi yang diperoleh menunjukkan bahwa VIM adalah metode yang lebih sederhana untuk mencari solusi persamaan diferensial fraksional Riccati nonlinier dengan orde $0<\alpha\leq 1$ dan koefesien konstan. Kedua metode dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati non-linear tersebut namun mempunyai nilai yang berbeda. Pada contoh yang diberikan menggunakan $\alpha = \frac{1}{6}$ sampai dengan $\alpha = 1$, terlihat bahwa jika α semakin mendekati 1, maka selisih antara kedua solusi tersebut semakin besar.

Referensi

[1] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
[2] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
[4] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
[5] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, part II, *Geophysical Journal International*, vol. 13, no. 5, pp. 529–539, 1967.
[6] G. A. Einicke, L. B. White, R. R. Bitmead, The use of fake algebraic Riccati equations for cochannel demodulation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 9, pp. 2288–2293, 2003.
[7] M. Gerber, B. Hasselblatt, D. Keesing, The riccati equation: pinching of forcing and solutions, *Experimental Mathematics*, vol. 12, no. 2, pp. 129–134, 2003.
[8] R. E. Kalman, Y. C. Ho, K. S. Narendra, Controllability of linear dynamical systems, *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, pp. 189–213, 1963.

[9] S. Bittanti, P. Colaneri G. De Nicolao, *The periodic Riccati equation*, in The Riccati Equation, Communications and Control Engineering, pp. 127–162, Springer, Berlin, 1991.

[10] S. Bittanti, P. Colaneri, G. O. Guardabassi, Periodic solutions of periodic Riccati equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 7, pp. 665–667, 1984.

[11] H. Aminikhah, M. Hemmatnezhad, An efficient method for quadratic Riccati differential equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 4, pp. 835–839, 2010.

[12] S. Abbasbandy, Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 172, no. 1, pp. 485–490, 2006.

[13] S. Abbasbandy, Iterated He's homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 175, no. 1, pp. 581–589, 2006.

[14] Y. Tan and S. Abbasbandy, Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, no. 3, pp. 539–546, 2008.

[15] S. Abbasbandy, A new application of He's variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian's polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 207, no. 1, pp. 59–63, 2007.

[16] N. A. Khan, A. Ara, M. Jamil, An efficient approach for solving the Riccati equation with fractional orders, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 9, pp. 2683–2689, 2011.

[17] H. Jafari and H. Tajadodi, He's variational iteration method for solving fractional Riccati differential equation, *International Journal of Differential Equations*, vol. 2010, Article ID 764738, 8 pages, 2010.

[18] S. Momani, N. Shawagfeh, Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 182, no. 2, pp. 1083–1092, 2006.

[19] G. Nhawu, P. Mafuta, J. Mushanyu, The Adomian Decomposition Method for Numerical Solution of First-Order Differential Equations, *J. Math. Comput. Sci.*, vol. 6, no. 3, 307-314, 2016.

[20] I. Javed, A. Ahmad, M. Hussain, S. Iqbal, Some Solutions of Fractional Order Partial Differential Equations Using Adomian Decomposition Method, 2017.

[21] S. Momani, An explicit and numerical solutions of the fractional KdV equation, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 70, 110-118, 2005.

[22] J. H. He, Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 34, no. 4, pp. 699–708, 1999.

[23] J. H. He and X. H. Wu, Variational iteration method: new development and applications, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 54, no. 7-8, pp. 881–894, 2007.

[24] J. H. He, Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations, *Bulletin of Science, Technology & Society*, vol. 15, no. 2, pp. 86–90, 1999.

[25] M. D. Johansyah, J. Nahar, A. K. Supriatna, S. Supian, Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville, *8th Industrial Research Workshop and National Seminar Politektik Negeri Bandung*, Juli 26, 2017.

[26] M. D. Johansyah, J. Nahar, F. H. Badruzzaman, Analisis Turunan dan Integral Fraksional Fungsi Pangkat Tiga dan Fungsi Eksponensial, Jurnal Matematika Vol 16 No 2 2017