

Program MATLAB untuk Membentuk Compound Distribution

ACENG KOMARUDIN MUTAQIN

Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Islam Bandung
Jln. Purnawarman No. 63 Bandung 40116,
E-mail: shidiq_03@yahoo.com

ABSTRAK

Salah satu teori statistika yang dipakai untuk menaksir outstanding claim liability dalam asuransi umum adalah compound distribution. Compound distribution merupakan distribusi untuk peubah acak hasil penjumlahan peubah-peubah acak yang saling bebas, dimana banyaknya peubah-peubah acak tersebut juga merupakan peubah acak. Makalah ini membahas pembangunan program MATLAB untuk membentuk compound distribution. Program yang dibangun dapat diterapkan untuk distribusi apapun. Sebagai bahan aplikasi digunakan data riil klaim produk asuransi mobil di perusahaan asuransi PT XYZ.

Kata Kunci: Outstanding claims liability; compound distribution; MATLAB; konvolusi.

1. PENDAHULUAN

Menaksir total cadangan uang di masa datang untuk membayar klaim-klaim yang telah terjadi merupakan pekerjaan penting bagi perusahaan asuransi. Pertanggungjawaban perusahaan asuransi terhadap klaim-klaim yang telah terjadi dan belum dibayarkan tersebut disebut *outstanding claims liability* (OCL). Perhitungan OCL biasanya diselesaikan dengan menggunakan metode yang sifatnya stokastik. Ini terjadi karena total uang dan waktu pembayaran klaim bersifat acak, hal ini membuat ketidakpastian (*uncertainty*) mengenai OCL. Derajat ketidakpastiannya tergantung pada kelas bisnis yang diambil. Secara umum ada dua kelas bisnis, yaitu *short-tail* dan *long-tail* (Olofsson, 2006). Kelas bisnis *short-tail* adalah suatu bisnis asuransi dimana penundaan antara terjadinya klaim dan waktu penyelesaiannya singkat, seringkali kurang dari satu tahun. Contoh dari kelas bisnis *short-tail* adalah asuransi kebakaran, asuransi gempa bumi, dan asuransi kerusakan fisik mobil. Kelas bisnis *long-tail* adalah suatu bisnis asuransi dimana penundaan antara terjadinya klaim dan waktu penyelesaiannya lama, mungkin lebih dari satu tahun (seringkali lebih dari lima tahun (Atkins, 2001)). Contoh dari kelas bisnis *long-tail* adalah asuransi pertanggungangan pihak ketiga, asuransi pesawat terbang, asuransi malpraktik medis, reasuransi, dan asuransi laut.

Salah satu teori statistika yang dipakai untuk menaksir OCL adalah *compound distribution* (Klugman et al., 2004). *Compound distribution* adalah distribusi untuk peubah acak yang terbentuk dari hasil penjumlahan peubah-peubah acak, dimana banyaknya peubah-peubah acak tersebut juga merupakan peubah acak. Dalam beberapa buku stokastik, peubah acak yang terbentuk dikenal sebagai jumlah acak (*random sum*). Jumlah acak sering muncul dalam antrian, teori risiko, model populasi, dan biometrik (Taylor dan Karlin, 1994). Makalah ini membahas pembangunan program MATLAB untuk membentuk *compound distribution*. Program yang dibangun dapat diterapkan untuk distribusi apapun. Sebagai bahan aplikasi digunakan data riil klaim produk asuransi mobil.

Sisa dari makalah ini disusun sebagai berikut. *Outstanding claims liability* dibahas pada Bagian 2. *Compound Distribution* dari OCL disajikan dalam Bagian 3. Bagian 4 menguraikan memuat algoritma dan program MATLAB. Sedangkan bagian terakhir berisikan aplikasi *compound distribution* dalam bidang asuransi.

2. OUTSTANDING CLAIMS LIABILITY

Misalkan D_{ij} menyatakan peubah acak dalam bentuk *incremental* (bisa berupa banyaknya klaim atau total pembayaran klaim) untuk klaim-klaim yang terjadi pada *accident period* i dan dibayarkan pada *development period* j , dimana $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$. Peubah acak D_{ij} mempunyai pengamatan jika $i + j \leq n + 1$ (*run-off triangle data*), lainnya merupakan pengamatan-pengamatan yang akan datang (*outstanding claims*) dan berada dalam *future triangle* (Olofsson, 2006). Umumnya satuan dari *period* adalah tahun, tapi mungkin juga kuartal (lihat Taylor & McGuire (2004)).

Tabel 1 mengilustrasikan *run-off triangle data* dan *future triangle data* dalam bentuk *incremental*. *Run-off triangle data* adalah sel-sel D_{ij} yang berwarna putih sedangkan *future triangle data* adalah sel-sel D_{ij} yang berwarna abu-abu.

Tabel 1. Run-off Triangle Data dan Future Triangle Data dalam Bentuk Incremental

Accident Period	Development Period						
	1	2	...	j	...	$n-1$	n
1	D_{11}	D_{12}	...	D_{1j}	...	$D_{1,n-1}$	D_{1n}
2	D_{21}	D_{22}	...	D_{2j}	...	$D_{2,n-1}$	D_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\vdots
i	D_{i1}	D_{i2}	...	D_{ij}	\ddots	$D_{i,n-1}$	D_{in}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$n-1$	$D_{n-1,1}$	$D_{n-1,2}$	\ddots	$D_{n-1,j}$...	$D_{n-1,n-1}$	$D_{n-1,n}$
n	$D_{n,1}$	$D_{n,2}$...	$D_{n,j}$...	$D_{n,n-1}$	$D_{n,n}$

Outstanding claims liability untuk *accident period* i (R_i) didefinisikan sebagai

$$R_i = \sum_{k=n+2-i}^n D_{ik}; \text{ untuk } i = 2, \dots, n \quad (1)$$

Sedangkan total *outstanding claims liability* (R) adalah

$$R = \sum_{i=2}^n \sum_{k=n+2-i}^n D_{ik} \quad (2)$$

3. COMPOUND DISTRIBUTION DARI OCL

Misalkan S , menyatakan total pembayaran klaim di masa datang (atau OCL), yaitu jumlah dari suatu peubah acak, N , pembayaran individu X_1, X_2, \dots, X_N . Oleh karenanya,

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N; \text{ untuk } N = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

dimana $S = 0$, ketika $N = 0$.

Diasumsikan bahwa:

1. Bersyarat pada $N = n$, peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n adalah iid.
2. Bersyarat pada $N = n$, distribusi dari peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n tidak tergantung pada n .
3. Distribusi dari N tidak tergantung pada nilai-nilai dari X_1, X_2, \dots .

Pendekatan untuk membangun distribusi dari S adalah melalui tahapan berikut:

1. Membangun distribusi untuk N berdasarkan data.
2. Membangun distribusi untuk X_j berdasarkan data.

3. Menggunakan kedua distribusi di atas untuk membentuk distribusi dari S .

Peubah acak S yang ada pada Persamaan (3) mempunyai fungsi distribusi

$$\begin{aligned}
 F_S(x) &= \Pr(S \leq x) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(S \leq x \mid N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

dimana $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$ adalah fungsi distribusi dari X_j dan $p_n = \Pr(N = n)$. Dalam Persamaan (4), $F_X^{*n}(x)$ adalah konvolusi n lipat dari fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak X . Distribusi pada Persamaan (4) disebut sebagai *compound distribution* dengan fungsi peluang

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x)
 \tag{5}$$

Ekspektasi dari variansi dari peubah acak S adalah

$$E(S) = E(N)E(X)
 \tag{6}$$

$$\text{Var}(S) = E(N)\text{Var}(X) + \text{Var}(N)[E(X)]^2
 \tag{7}$$

```

function [S,fS]=compound(f1,pn)
band=20000; % Banyaknya nilai aggregate, s = 0,1,2,...,band.
jf=length(f1); % Banyaknya nilai x (besarnya klaim)
% karena proses diskritisasi
% yang nilai peluangnya adalah f1=f(x).
m=length(pn); % Banyaknya nilai n (frekuensi klaim)
% yang nilai peluangnya adalah pn.
S=0:band; % Nilai-nilai aggregate, s = 0,1,2,...,band.
f0=zeros(band+1,1); % Distribusi f*0(x) Semuanya nol, kecuali
f0(1,1)=1; % untuk x = 0.
f(:,1)=f0; % Distribusi f*0(x) disimpan di kolom 1
% pada matriks f
A=zeros(band+1,1); % Inisialisasi untuk distribusi f*1(x) = f(x)
A(1:jf)=f1; % Pengisian nilai-nilai f*1(x) = f(x)
f(:,2)=A; % Distribusi f*1(x) disimpan di kolom 2

% LOOPING for di bawah ini untuk menghitung
% f*2(x), f*3(x), ...
for i=3:m
    fc=conv(f(:,2),f(:,i-1)); % Proses menghitung convolution
    fc=fc(1:band+1); % Pengambilan hasil convolution
    f(:,i)=fc; % penyimpanan hasil convolution
end
S=S'; % Nilai-nilai aggregate, s = 0,1,2,...,band
% disimpan dalam vektor kolom.
fS=f*pn; % Distribusi dari aggregate, S (Compound Distribution)
    
```

Gambar 1. Program MATLAB untuk Membentuk *Compound Distribution*

4. ALGORITMA DAN PROGRAM MATLAB

Algoritma untuk membentuk *compound distribution* adalah sebagai berikut:

1. Inputkan distribusi untuk peubah acak $N(p_n)$ dan peubah acak $X(f(x))$. Apabila peubah acak X kontinu, maka salah satu pendekatannya adalah mendiskritkannya terlebih dahulu.
2. Tentukan batas maksimum untuk nilai dari peubah acak S .
3. Tentukan banyaknya nilai yang mungkin untuk peubah acak N , dan X .
4. Tentukan nilai-nilai yang mungkin untuk peubah acak S .
5. Tetapkan nilai $f_k^0(0) = 1$, dan $f_k^0(x) = 0$, untuk $x \neq 0$.
6. Lakukan inisialisasi, yaitu $f_k^1(x) = f(x)$.
7. Hitung konvolusi fungsi densitas $f_k^k(x)$, untuk $k = 2, 3, \dots$ (sampai banyaknya nilai N yang mungkin).
8. Bentuk *compound distribution* dengan menggunakan Persamaan (5).

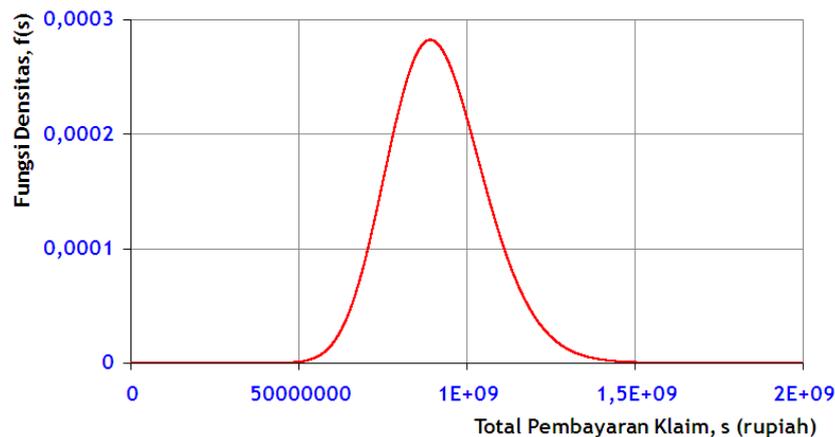
Program MATLAB untuk algoritma di atas disajikan dalam Gambar 1.

5. APLIKASI COMPOUND DISTRIBUTION

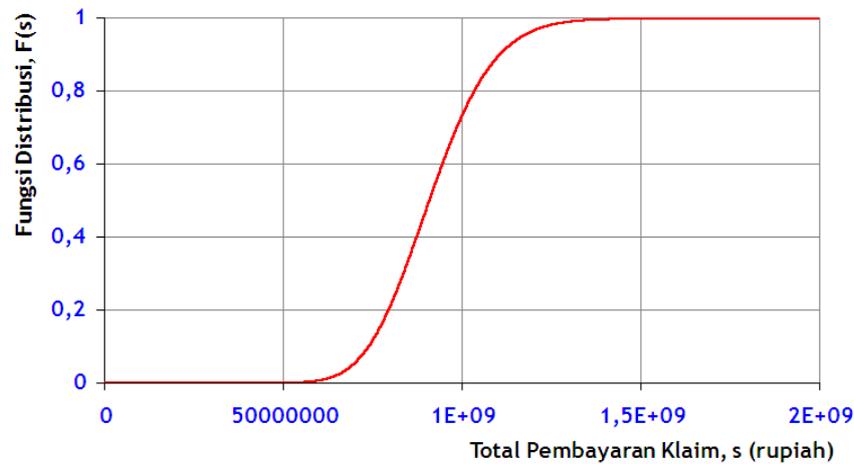
Data yang akan digunakan untuk aplikasi adalah data klaim produk asuransi mobil yang ada di perusahaan asuransi PT XYZ di Bandung, Jawa Barat. Untuk lebih jelasnya mengenai data ini dapat dilihat di Mutaqin *et al.* (2009).

Distribusi peluang total OCL (S) dibentuk menggunakan Persamaan (5), dimana peubah acak N , banyaknya pembayaran klaim di masa datang mengikuti distribusi binomial negatif dengan taksiran parameter $\hat{\beta} = 1$, dan $\hat{r} = 165,9$, dan peubah acak X , total pembayaran klaim di masa datang mengikuti lognormal dengan taksiran parameter $\hat{\mu} = 14,942$, dan $\hat{\sigma} = 1,0721$ (Mutaqin *et al.*, 2009). Sebelum menggunakan Persamaan (5), terlebih dahulu dilakukan pendiskritan untuk total pembayaran klaim di masa datang. Pendiskritan dilakukan dengan jalan membuat selang-selang dalam rentang 0 – 300.000.000, dimana masing-masing selang lebarnya 100.000. Dengan demikian ada sebanyak 3.000 selang.

Dengan mengkombinasikan distribusi binomial negatif dan distribusi lognormal akan diperoleh distribusi total OCL yang gambar fungsi densitas dan fungsi distribusinya masing-masing diilustrasikan pada Gambar 4 dan 5.



Gambar 4. Fungsi Densitas untuk Distribusi Total OCL



Gambar 5. Fungsi Distribusi Total OCL

Taksiran rata-rata distribusi total OCL adalah Rp. 909.207.957,58, dan taksiran simpangan bakunya adalah Rp. 143.910.718,47. Taksiran persentil ke-75 dari distribusi total OCL adalah sekitar Rp. 1.009.000.000,00. Terlihat bahwa distribusi dari total OCL adalah *skewed-to-the-right* (condong ke kiri atau ekornya di kanan).

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Atkins, G. (2001). The Role of Modelling Long Tail Classes of Business Risk in Managing Capital. Proceedings of the 2001 Conference on Enhancing Shareholder Value through Capital Risk Management: 41-72.
- [2]. De Alba, E. (2006). Claim Reserving When There are Negative Values in Runoff Triangle: Bayesian Analysis Using the Three-Parameter Log-Normal Distribution. North American Actuarial Journal Vol. 10, No. 3: 45-59.
- [3]. England, P. D., dan Verrall, R. J. (2002). Stochastic Claims Reserving in General Insurance. <http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/sessional/sm0201.pdf>. Download pada 7 Oktober 2007.
- [4]. Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E. (2004). Loss Models: From Data to Decisions. John Wiley & Sons: New Jersey.
- [5]. Mack, T. (1993). Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserves Estimates. ASTIN BULLETIN, Vol. 23, No. 2: 213-225.
- [6]. Olofsson, M. (2006). Stochastic Loss Reserving Testing the New Guidelines from the Australian Prudential Regulation Authority (APRA) on Swedish Portfolio Data Using a Bootstrap Simulation and Distribution-Free Method by Thomas Mack. <http://www.math.su.se/mathstat/reports/serieb/2006/rep13/report.pdf>. Download pada 7 Oktober 2007.
- [7]. Taylor, H. M., Karlin, S. (1994). An Introduction to Stochastic Modeling. Edisi Revisi, Academic Press, New York.
- [8]. Taylor, G., dan McGuire, G. (2004). Loss Reserving with GLMs: a Case Study. Casualty Actuarial Society 2004 Discussion Paper Program, 327-392. Paper ini dipresentasikan pada CAS Spring 2004 Meeting, Colorado Spring, CO, May 16-19 2004. <http://www.casact.org/pubs/dpp/dpp04/04dpp327.pdf>. Download pada 24 Desember 2007.
- [9]. Taylor, G., McGuire, G., dan Greenfield, A. (2003). Loss Reserving: Past, Present and Future. Invited Lecture untuk the XXXIV ASTIN Colloquium, Berlin, 24-27 August 2003. Diproduksi ulang pada The Research Paper Series of the Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne. <http://www.economics.unimelb.edu.au/SITE/actwww/html/n0109.pdf>. Download pada 24 Desember 2007.
- [10]. Wright, T. S. (1997). Probability Distribution of Outstanding Liability from Individual payments Data. Insitute of Actuaries Claims Reserving Manual, Section D7. www.actuaries.org.uk.
- [11]. Wright, T. S. (2007). Using Individual Claim Data. Dipresentasikan pada Stochastic Reserving Seminar. http://www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0011/103205/11_Wright.pdf. Download pada 26 Januari 2008.