

# Pengaruh Jumlah Perulangan Bootstrap terhadap Dugaan Selang Kepercayaan Parameter Selisih Rata-rata Dua Populasi

NOVA ERNYDA DAN MARZUKI

Universitas Syiah Kuala  
Kopelma Darussalam, Banda Aceh

## ABSTRAK

Jika kovariat dari objek yang diamati tidak homogen maka pendugaan selisih rata-rata akan bias. Sebagai solusinya, salah satu cara yang digunakan adalah dengan membagi kovariat objek-objek tersebut menjadi kelas-kelas berdasarkan skor propensitas yang merupakan salah satu karakteristik dari objek tersebut. Tujuan penelitian ini adalah mengevaluasi perbedaan rata-rata dua populasi untuk sebaran vektor kovariat sampel yang berbeda melalui selang kepercayaan dengan menggunakan teknik skor propensitas. Evaluasi dilakukan terhadap keakuratan selisih rata-rata yang dihasilkan untuk jumlah data yang berbeda. Data yang digunakan adalah data bangkitan dengan 4 peubah, masing-masing peubah respons, indikator, dan dua kovariat. Kovariat dibangkitkan dengan sebaran normal dan bernoulli. Peubah respon diperoleh dengan sebuah model regresi yang telah ditetapkan. Simulasi dilakukan untuk enam kasus, yaitu kombinasi antara jumlah data (200, 400, dan 600) dan jumlah perulangan bootstrap (50, dan 100). Jika jumlah perulangan bootstrap yang lebih kecil maka jarak antara titik tengah selang dengan nilai parameter yang sebenarnya cenderung lebih dekat.

*Kata Kunci: selisih rata-rata, selang kepercayaan, skor propensitas*

## 1. PENDAHULUAN

Hasil perbandingan suatu parameter antardua populasi akan bias jika objek-objek dalam kedua populasi berbeda dalam hal latar belakangnya. Misalkan sebuah penelitian akan menduga selisih produksi kedelai antara dua daerah. Pendugaan ini akan sulit jika dilakukan secara langsung karena di antara dua daerah tersebut mempunyai jumlah lahan yang berbeda, faktor lingkungan, atau karakteristik petani yang berbeda-beda ataupun fasilitas yang tidak sama.

Perhitungan selisih rata-rata dua populasi dengan analisis regresi dapat dilakukan dengan memasukkan satu peubah bebas, yaitu peubah indikator  $Z$  ke dalam model. Sedangkan keberagaman latar belakang mahasiswa seperti kasus di atas, dapat dimasukkan ke dalam model sebagai peubah bebas lainnya. Harapan selisih rata-rata antara dua populasi ini dipresentasikan oleh koefisien dari  $Z$ , misal  $\delta$ . Namun kesimpulan yang diambil berdasarkan asumsi bahwa semua peubah lain konstan.

Metode pendugaan selisih secara langsung mengasumsikan tidak ada pengaruh peubah lain (kovariat) atau dengan kata lain setiap objek yang diamati mempunyai latar belakang yang sama kecuali peubah yang diamati. Salah satu cara yang digunakan untuk mengendalikan perbedaan itu adalah dengan membagi latar belakang objek-objek tersebut menjadi kelas-kelas berdasarkan karakteristik yang diamati. Salah satu karakteristik itu adalah skor propensitas. Pendugaan skor propensitas dilakukan melalui sebuah model logistik.

Kajian yang akan dilakukan hanya untuk kasus dua kovariat yang berukuran  $n \times 2$ . Evaluasi dilakukan untuk enam kasus. Data sampel yang dibangkitkan masing-masing kasus sebanyak 200, 400, dan 600. Jumlah sampel untuk tiap-tiap kelompok sama banyak dalam masing-masing kasus. Dan perulangan bootstrap masing-masing dilakukan 50 dan 100 kali.

Penelitian ini bertujuan untuk mengevaluasi perbedaan rata-rata dua populasi untuk sebaran vektor kovariat sampel yang berbeda melalui selang kepercayaan dengan menggunakan teknik

skor propensitas. Evaluasi dilakukan terhadap keakuratan selisih rata-rata yang dihasilkan untuk jumlah data yang berbeda.

Kajian tentang selisih rata-rata ini diharapkan dapat menjadi alternatif bagi peneliti pada saat berhadapan dengan sampel yang latar belakangnya tak homogen, terutama untuk kovariat yang distribusi Normal dan Bernoulli. Hasil evaluasi diharapkan dapat diketahui sejauh mana variasi yang disebabkan oleh latar belakang dari sampel dapat direduksi.

## 2. DATA DAN METODE ANALISA

Penelitian ini menggunakan data bangkitan dengan komputer. Data bangkitan digunakan untuk mengetahui penyebaran dugaan selisih rata-rata dua populasi. Peubah yang dilibatkan dalam penelitian ini sebanyak 4 buah untuk masing-masing kelompok data. Peubah yang dimaksudkan adalah peubah  $Y$  sebagai peubah yang dibandingkan, peubah  $Z$  sebagai peubah indikator kelompok, dan dua peubah  $X_1$  dan  $X_2$  sebagai vektor kovariat  $\mathbf{X}$ .

Data bangkitan diperoleh dengan menetapkan sebaran kovariat terlebih dahulu. Pembangkitan kovariat  $X_1$  diasumsikan bahwa  $X_1 \sim Normal(10, 1)$  untuk kelompok pertama dan  $X_1 \sim Normal(12, 1)$  untuk kelompok kedua. Pembangkitan kovariat  $X_2$  untuk masing-masing kelompok diasumsikan bahwa  $X_2 \sim Bernoulli(0.4)$ . Selanjutnya, data  $Y$  dibangkitkan berdasarkan suatu hubungan linier  $Y = \delta Z + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$  dengan menggunakan  $\delta = 2$ ,  $\beta_1 = 0.5$ , dan  $\beta_2 = 0.4$ .

Simulasi dilakukan terhadap enam kasus. Kasus I, data yang dibangkitkan masing-masing kelompok sebanyak 100, sehingga total sampel untuk kasus ini adalah 200. Sedangkan untuk kasus II, data yang dibangkitkan sebanyak 200 untuk masing-masing kelompok. Dan untuk kasus III dibangkitkan sebanyak 300 data untuk masing-masing kelompok. Sehingga total sampel untuk kasus II dan III ini masing-masing adalah 400 dan 600. Perulangan bootstrap untuk kasus I sampai III sebanyak 50 kali. Sedangkan untuk kasus IV sampai VI dilakukan dengan variasi jumlah data yang sama, namun dengan perulangan bootstrap 100 kali.

Evaluasi metode didasarkan kepada selang kepercayaan dari nilai  $\hat{\delta}$  yang dihasilkan. Selang  $\hat{\delta}$  yang paling dekat dengan  $\delta$  yang ditetapkan adalah yang lebih baik. Perangkat lunak komputer yang digunakan dalam pembangkitan dan pengolahan data dilakukan dengan MATLAB 7.0

## 3. SELANG KEPERCAYAAN PARAMETER SELISIH

Empat peubah diperlukan dalam studi analisis seperti diuraikan pada bagian sebelumnya. Keempat peubah tersebut masing-masing adalah  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Z$ , dan  $Y$ . Pembangkitan kovariat  $X_1$  diasumsikan bahwa  $X_1 \sim Normal(10, 1)$  untuk kelompok pertama ( $Z=1$ ) dan  $X_1 \sim Normal(12, 1)$  untuk kelompok kedua ( $Z=0$ ). Sedangkan kovariat  $X_2$  untuk masing-masing kelompok diasumsikan berdistribusi Bernoulli dengan parameter 0,4 atau  $X_2 \sim Bernoulli(0.4)$ . Selanjutnya, data  $Y$  dibangkitkan berdasarkan suatu hubungan linier  $Y = \delta Z + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$  dengan menggunakan  $\delta = 2$ ,  $\beta_1 = 0.5$ , dan  $\beta_2 = 0.4$ .

Kasus I dibangkitkan sebanyak 200 data atau masing-masing kelompok dengan 100 data. Kemudian dicari skor propensitas untuk setiap objek data. Skor propensitas ini diurutkan dari kecil ke besar kemudian dibagi menjadi lima kelas. Selanjutnya diperoleh pendugaan selisih rata-rata  $\hat{\delta}$  untuk peubah  $Y$  antara kedua kelompok. Langkah-langkah ini dilakukan sebanyak 50 kali. Nilai  $\hat{\delta}$  diurutkan dari kecil hingga besar. Batas bawah selang adalah nilai dugaan ke-50(0.025) karena mengambil selang kepercayaan 95%. Sedangkan batas atasnya adalah nilai dugaan ke-50(0.975).

Kasus II, dibangkitkan data sebanyak 400, dengan masing-masing kelompok 200 data. Langkah berikutnya mengikuti langkah perhitungan pada kasus I, sampai diperoleh

pendugaan selang kepercayaan selisih rata-ratanya. Kasus III adalah dengan membangkitkan data sebanyak 600 data, dengan 300 data untuk masing-masing kelompok. Proses perhitungan mengikuti proses pada dua kasus sebelumnya, juga dengan perulangan yang sama, sebanyak 50 kali. Keseluruhan dugaan selang kepercayaan ini disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1.  
Selang kepercayaan rata-rata selisih untuk perulangan 50

Jumlah Data	Batas Bawah	Batas Atas
200	1.6896	2.3371
400	1.7266	2.2859
600	1.6821	2.2465

Kasus IV sampai dengan ke VI, dilakukan mengikuti langkah-langkah seperti kasus I sampai dengan III namun dengan perulangan bootstrap sebanyak 100 kali. Sehingga batas bawah dan batas atas selang kepercayaan masing-masing diambil nilai dugaan selisih urutan ke-100(0.025) dan nilai dugaan ke-100(0.975). Keseluruhan dugaan selang kepercayaan ini disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2.  
Selang kepercayaan rata-rata selisih untuk perulangan 100

Jumlah Data	Batas Bawah	Batas Atas
200	1.7496	2.6129
400	1.7700	2.3608
600	1.8553	2.3063

#### 4. PERBANDINGAN SELANG KEPERCAYAAN UNTUK SETIAP KASUS

Selisih rata-rata dua populasi  $\delta$  diduga dengan teknik skor propensitas. Hal ini dilakukan karena sebaran vektor kovariat sampel telah ditetapkan berbeda untuk setiap objek yang ingin dibandingkan. Evaluasi teknik ini didasarkan pada tetapan awal dari parameter  $\delta$  sebesar 2.

Nilai dugaannya yaitu  $\hat{\delta}$  yang mendekati nilai 2 ini dianggap yang paling baik. Sebagaimana pada Tabel 1 dan Tabel 2, nampak selang kepercayaan nilai-nilai  $\hat{\delta}$  mencakup nilai 2.

Enam selang kepercayaan sudah dihasilkan. Selang yang paling pendek adalah selang untuk kasus VI (jumlah data 600 dan perulangan bootstrap 100 kali). Dan selang yang paling lebar adalah pada kasus IV (jumlah data 200 dan perulangan bootstrap 100 kali). Sedangkan jarak antara nilai tengah selang dengan nilai parameter sebenarnya (yaitu 2) yang paling kecil adalah pada kasus II dan yang paling besar jaraknya terdapat pada kasus IV. Tabel 3 menyajikan ukuran lebar selang dan jarak yang dimaksud untuk setiap kasus yang dicoba.

Jika ditinjau dari lebar selang kepercayaan 95% yang dihasilkan maka selang yang dianggap baik adalah untuk kasus terakhir, yaitu jumlah data banyak (600) dan perulangan bootstrap sebanyak 100 kali. Namun jika dilihat dari aspek ketepatan pendugaan (jarak) maka kasus ke II dianggap lebih baik, yaitu jumlah data sedang (400) dan perulangan bootstrap sebanyak 50 kali.

Tabel 3.  
Lebar selang dan jarak dengan parameter

Kasus	Lebar Selang	Jarak
I	0.6475	0.013
II	0.5593	0.006
III	0.5644	0.036
IV	0.8633	0.181
V	0.5908	0.065
VI	0.4510	0.081

## 5. SIMPULAN

Kajian terhadap pendugaan selang selisih rata-rata dua populasi dilakukan untuk enam kasus dengan jumlah data yang dilibatkan sebanyak 200, 400, dan 600 dan perulangan sebanyak 50 dan 100 kali. Kovariat yang ditentukan sebanyak dua macam, yaitu kovariat yang menyebar Normal dan Bernoulli. Sebaran kovariat normal yang ditetapkan berbeda untuk dua populasi. Ada beberapa hal yang dapat disimpulkan sehubungan dengan kajian tersebut, yaitu:

- 1) Jumlah data yang dilibatkan dalam perhitungan selang kepercayaan selisih rata-rata dengan teknik skor propensitas tidak mempengaruhi lebar selang yang dihasilkan.
- 2) Jumlah perulangan bootstrap yang lebih kecil cenderung lebih dekat jarak antara titik tengah selang dengan nilai parameter yang sebenarnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hosmer, D.W. dan Lemeshow, S. 1989. *Applied Logistic Regression*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Parsons, LS. 2001. Reducing Bias in a Propensity Score Matched-Pair Sample Using Greedy Matching Techniques. *Ovation Research Group* paper 214-26.
- [3] Rosenbaum, P.R dan Rubin, D.B. 1984. Reducing Bias in Observational Studies Using Subclassification on the Propensity Score. *Journal of the American Statistical Association* 79:318-328.
- [4] Supardi, A. 2003. *Metode Grafis untuk Pemeriksaan Model Regresi Logistik*. Jurusan Statistika Universitas Islam Bandung.
- [5] Tu, W dan Zhou, X.H. 2003. A Bootstrap Confidence Interval Procedure for the Treatment Effect Using Propensity Score Subclassification. *UW Biostatistics Working Paper Series* paper 200.