

Interval Konfidensi untuk Satu Parameter Distribusi Eksponensial di Bawah Sensor Lengkap dengan Metode Bootstrap (Studi Kasus Data Waktu Tunggu Bencana Gempa Bumi di Bulan Maret 2013)

AKHMAD FAUZY

Program Studi Statistika, FMIPA UII Yogyakarta

ABSTRACT

In this research will be discussed on an interval estimate for the one parameter exponential distribution under complete censored data with a case study of data waiting time for earthquake disaster in March 2013. The exponential distribution has immensely contributed in the analysis of lifetime. Historically the exponential distribution was the first lifetime model in which statistical methods in survival analysis were extensively developed. For samples that are singly failure-censored on the complete censored, confidence intervals on one parameter exponential distribution are obtained from the exact sampling distribution on the following quantity related to the total time on test T.

Keyword: interval, exponential, complete censoring, earthquake.

1. PENDAHULUAN

Bumi yang kita tempati memiliki banyak rahasia alam yang tidak kita ketahui. Kita tidak pernah mengetahui kejadian-kejadian yang akan terjadi di muka bumi ini. Banyak kejadian alam yang mendatangkan pertanyaan bagi manusia. Salah satu kejadian alam yang sudah tidak asing di telinga masyarakat yaitu gempa bumi. Gempa bumi merupakan suatu peristiwa yang sangat sering terjadi di muka bumi ini. Salah satunya di Indonesia. Indonesia adalah salah satu negara yang memiliki tingkat rawan bencana alam yang sangat tinggi. Indonesia sendiri memiliki titik-titik gempa yang tersebar di seluruh wilayah di Indonesia (Christina, 2011).

Salah satu cara untuk meningkatkan kualitas hidup adalah melakukan analisis uji hidup (*survival analysis*). Untuk mendapatkan data uji hidup biasanya orang melakukan eksperimen. Yang membedakan analisis uji hidup dengan bidang-bidang statistik lainnya adalah adanya penyensoran. Beberapa tipe penyensoran antara lain sensor lengkap, sensor tipe I dan tipe II. Dalam uji sampel lengkap ini eksperimen akan dihentikan jika semua komponen yang diuji telah mengalami kegagalan semua (Lawless, 2003).

Distribusi eksponensial dengan satu parameter adalah salah satu distribusi yang penting dalam analisis uji hidup. Untuk dapat memberikan gambaran yang baik tentang nilai parameter tersebut, biasanya dicari nilai interval konfidensinya. Bain dan Engelhardt (1992) telah menguraikan suatu metode dalam mencari interval konfidensi untuk satu parameter distribusi eksponensial. Perhitungan interval tersebut memerlukan bantuan distribusi Chi-kuadrat. Sampai sekarang metode ini sering digunakan.

Efron dan Tibshirani (1993) telah menerangkan bahwa metode bootstrap persentil adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah-masalah ketidakbiasan dan keakuratan, khususnya dalam menentukan interval. Interval yang dihasilkan tidak memerlukan bantuan distribusi. Fauzy (2010) telah melakukan penelitian tentang prediksi interval reliabilitas produk dengan metode bootstrap persentil. Pada tahun 2011, 2009 dan 2008 Fauzy juga telah melakukan penelitian tentang estimasi interval bagi kuantil pada data berdistribusi eksponensial dan interval bagi distribusi lognormal dengan metode bootstrap. Metode bootstrap persentil perlu dicoba pada distribusi eksponensial satu

parameter di bawah kasus tersensor lengkap. Salah satu kasus yang akan dicoba menggunakan data waktu tunggu bencana gempa bumi di Indonesia pada bulan Maret 2013.

1.1. Tujuan

Penelitian yang dilaksanakan bertujuan untuk menunjukkan bahwa interval konfidensi untuk satu parameter distribusi eksponensial pada kasus tersensor lengkap yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil akan lebih baik apabila dibandingkan dengan menggunakan metode tradisional seperti yang selama ini kita gunakan.

1.2. Perumusan Masalah

Ada dua masalah yang harus diselesaikan dalam penelitian ini. Masalah yang pertama adalah menduga interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial pada kasus tersensor lengkap dengan metode tradisional dan metode bootstrap persentil. Masalah kedua adalah membandingkan kedua interval tersebut.

1.3. Metode

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data tentang waktu tunggu gempa bumi yang terjadi di Indonesia pada bulan Maret 2013 yang tercatat di BNPB seperti di bawah ini. Waktu tunggu didefinisikan sebagai jarak waktu (dalam hari) antara gempa bumi dengan gempa bumi berikutnya.

Tabel 1. Data waktu tunggu gempa bumi di Indonesia pada Maret 2013

No	Tanggal	Waktu Tunggu (hr)	Magnitude/ Kedalaman	Lokasi
1	3/25/2013	7 hari	5.3 SR/10 km	293 km tenggara Sumbawa Barat
2	3/18/2013	4 hari	5.5 SR/100 km	148 km barat laut Maluku Tenggara
3	3/14/2013	1 hari	5.1 SR/10 km	117 km barat daya Cianjur
4	3/13/2013	5 hari	5.1 SR/66 km	104 km barat laut Yalimo Papua
5	3/8/2013	3 hari	5.2 SR/10 km	191 km barat daya Buru Selatan
6	3/5/2013	-	5.0 SR/10 km	16 km tenggara Tanggamus Lampung

Langkah pertama adalah mengurutkan waktu tunggu di atas berdasarkan dari kecil ke besar. Selanjutnya membuat interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial pada kasus tersensor lengkap dengan metode tradisional. Langkah selanjutnya adalah mencari nilai ulangan bootstrap yang menunjukkan kondisi konvergen. Setelah diketahui kondisi konvergensinya, maka interval dengan metode bootstrap persentil dapat dicari. Kemudian hasil interval antara metode tradisional dengan metode bootstrap persentil dapat dibandingkan.

2. LANDASAN TEORI

Pada awalnya analisis uji hidup berfungsi sebagai salah satu alat analisis tentang waktu hidup sehingga berlaku kematian atau kerusakan di dalam bidang kedokteran dan teknik. Sampai saat ini analisis uji hidup telah berkembang ke bidang lain seperti ilmu asuransi, epidemiologi, ekonomi, demografi dan sebagainya. Buku teks yang khusus tentang analisis uji hidup dalam bidang kesehatan dan biologi dapat dilihat dalam Collett (2003), Kleinbaum dan Klein (2005), Klein dan Moeschberger (2003), Therneau dan Grambsch (2000) dan Hougaard (2000). Dalam bidang teknik dapat dilihat dalam Birolini (2004), Ushakov (1994), Bury (1999), Wolstenholme (1999), dan Pham (2003).

2.1. Sensor Lengkap pada Distribusi Eksponensial

Fungsi kepadatan probabilitas distribusi eksponensial untuk satu parameter θ adalah sebagai berikut (Ireson, 1996):

$$f(t) = \theta^{-1} \exp(-t/\theta), \text{ dengan } t \geq 0, \theta \geq 0,$$

nilai rata-ratanya dapat dicari dengan jalan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \theta^{-1} \exp(-t/\theta) dt \\ &= \theta^{-1} \int_0^{\infty} t \exp(-t/\theta) dt = \frac{1}{\theta} \frac{\Gamma(2)}{(1/\theta)^2} = \theta \end{aligned}$$

Bury (1999) telah merumuskan nilai dugaan dari θ pada data tahan hidup tersensor lengkap, yaitu: $\hat{\theta} = \frac{\sum t_i}{n}$. Selanjutnya Bain dan Engelhardt (1992) telah menguraikan suatu rumus untuk mencari interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial pada data tahan hidup tersensor lengkap, yaitu:

$$\frac{2(n)(\text{rata-rata})}{\chi_{(1-\alpha/2, 2n)}^2} < \theta < \frac{2(n)(\text{rata-rata})}{\chi_{(\alpha/2, 2n)}^2}$$

2.2. Metode Bootstrap Persentil

Metode bootstrap adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah ketakstabilan dan keakurasian, khususnya dalam menentukan interval. Istilah bootstrap berasal dari "*pull oneself up by one's bootstrap*", yang berarti berpijak di atas kaki sendiri, berusaha dengan sumber daya minimal. Dalam sudut pandang statistika, sumber daya yang minimal adalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsi tertentu, atau data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya (Fauzy, 2000).

Tujuan dari penggunaan metode bootstrap adalah untuk mendapatkan pendugaan yang sebaik-baiknya yang berasal dari data yang minimal. Dengan demikian penggunaan komputer dalam metode bootstrap mutlak diperlukan.

Secara umum prosedur bootstrap persentil untuk menduga interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial di bawah sensor lengkap adalah sebagai berikut:

1. Berikan peluang yang sama $1/n$ pada setiap data tersensor lengkap berukuran n ,
2. Mengambil suatu sampel berulang secara acak berukuran n dengan pengembalian,
3. Ulangi langkah 2 sebanyak B kali untuk mendapatkan "*independent bootstrap replications*" $\hat{\beta}_n^{*1}, \hat{\beta}_n^{*2}, \dots, \hat{\beta}_n^{*B}$ dan mencari pada ulangan seberapa tercapai kondisi konvergen. Hitung rata-ratanya, yaitu:

$$\hat{\theta}_n^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\beta}_n^{*i},$$

4. Interval konfidensi bootstrap persentil pada tingkat kepercayaan $1 - \alpha$ didefinisikan dengan persentil ke- $100(\alpha/2)$ dan ke- $100(1-\alpha/2)$ pada $\hat{\beta}_n^*$, sehingga interval persentil dapat dinyatakan dengan:

$$\left[\hat{\theta}_n^{*(\alpha/2)}, \hat{\theta}_n^{*(1-\alpha/2)} \right]$$

3. GEMPA BUMI

Gempa bumi adalah peristiwa bergetarnya bumi akibat pelepasan energi di dalam bumi secara tiba-tiba yang ditandai dengan patahnya lapisan batuan pada kerak bumi. Akumulasi energi penyebab terjadinya gempabumi dihasilkan dari pergerakan lempeng-lempeng tektonik. Energi

yang dihasilkan dipancarkan ke segala arah berupa gelombang gempa bumi sehingga efeknya dapat dirasakan sampai ke permukaan bumi (BMKG, 2013).

Parameter gempa bumi antara lain waktu terjadinya gempa bumi (*origin time*), lokasi pusat gempabumi (*episenter*), kedalaman pusat gempabumi (*depth*) dan kekuatan gempa bumi (*magnitudo*). Sedangkan karakteristik gempa bumi antara lain:

- Berlangsung dalam waktu yang sangat singkat,
- Lokasi kejadian tertentu,
- Akibatnya dapat menimbulkan bencana,
- Berpotensi terulang lagi,
- Belum dapat diprediksi,
- Tidak dapat dicegah, tetapi akibat yang ditimbulkan dapat dikurangi.

Dalam Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika/BMKG (2013) dijelaskan bahwa menurut teori lempeng tektonik, permukaan bumi terpecah menjadi beberapa lempeng tektonik besar. Lempeng tektonik adalah segmen keras kerak bumi yang mengapung diatas astenosfer yang cair dan panas. Oleh karena itu, maka lempeng tektonik ini bebas untuk bergerak dan saling berinteraksi satu sama lain. Daerah perbatasan lempeng-lempeng tektonik, merupakan tempat-tempat yang memiliki kondisi tektonik yang aktif, yang menyebabkan gempa bumi, gunung berapi dan pembentukan dataran tinggi. Teori lempeng tektonik merupakan kombinasi dari teori sebelumnya yaitu teori pergerakan benua (*Continental Drift*) dan pemekaran dasar samudra (*Sea Floor Spreading*).

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data tentang waktu tunggu gempa bumi (dalam hari) yang terjadi di Indonesia pada bulan Maret 2013 yang tercatat di Badan Nasional Penanggulangan Bencana (BNPB).

Tabel 2. Data waktu tunggu gempa bumi di Indonesia pada Maret 2013

Urutan	1	2	3	4	5
Waktu tunggu (hari)	1	3	4	5	7

Data di atas adalah data tersensor lengkap, karena data tersebut adalah data waktu tunggu semua gempa bumi yang terjadi di bulan Maret. Data di atas berdistribusi eksponensial dengan satu parameter.

4.1. Metode Tradisional

Rumus yang digunakan untuk mencari interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial di bawah sensor lengkap adalah:

$$\frac{2(n)(rata - rata)}{\chi^2_{(1-\alpha/2, 2n)}} < \theta < \frac{2(n)(rata - rata)}{\chi^2_{(\alpha/2, 2n)}}$$

Nilai θ diduga dengan nilai rata-rata dari data waktu tunggu gempa bumi dan diperoleh 4.00 hari. Dengan menggunakan rumus di atas maka batas bawah, batas atas dan lebar interval pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % dapat diperoleh.

Tabel 3. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar interval (LS) pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	BB	BA	LS
99 %	1.5880	18.5541	16.9661
95 %	1.9528	12.3192	10.3664

4.2. Metode Bootstrap Persentil

Kondisi konvergen tercapai pada ulangan bootstrap ke-3000. Nilai θ -nya diduga dengan nilai rata-rata dari data tahan hidup pada ulangan tersebut dan diperoleh 4.00 hari. Interval bootstrap persentil pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % dapat dilihat pada tabel 3 di bawah ini.

Tabel 4. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar interval (LS) pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	BB	BA	LS
99 %	1.8000	6.2000	4.4000
95 %	2.2000	5.8000	3.6000

4.3. Perbandingan Lebar Interval

Perbandingan lebar interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial pada kasus tersensor lengkap yang dihasilkan oleh metode tradisional dan metode bootstrap persentil dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 5. Perbandingan lebar interval pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 %

Metode	TK	
	99 %	95 %
Tradisional	16.9661	10.3664
Bootstrap persentil	4.4000	3.6000
Selisih interval	12.5661	6.7664

Interval yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil lebih pendek dari pada yang dihasilkan oleh metode tradisional. Hal ini bisa dilihat pada Tabel 5, dimana terjadi selisih lebar interval yang cukup besar antara kedua metode tersebut. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa metode bootstrap persentil jauh lebih baik dari pada metode tradisional, karena metode bootstrap persentil menghasilkan lebar interval yang lebih pendek.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Metode yang lebih baik di dalam menduga interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial pada kasus tersensor lengkap adalah metode bootstrap persentil. Metode tersebut menghasilkan lebar interval yang lebih sempit apabila dibandingkan dengan metode tradisional.

Sebaiknya kita menggunakan metode bootstrap persentil dalam mencari interval konfidensi dari satu parameter distribusi eksponensial pada kasus tersensor lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

- [1].Bain, Lee J. and Max Engelhardt. (1992). *Introduction to probability and mathematical statistics*. Second edition. Boston: PSW-KENT Publishing Company.
- [2].Biolini, A. (2004). *Reliability engineering: theory and practice* (4th ed). Berlin: Springer-Verlag.
- [3].BMKG. (2013). *Bencana gempa bumi*. www.bmkg.go.id. Diakses 1 April 2013.
- [4].BNPB. (2013). *Data kebencanaan*. www.bnpb.go.id. Diakses 1 April 2013.
- [5].Bury, K. (1999). *Statistical distributions in engineering*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6].Chistina, J. (2011). *Gempa bumi dan aktifitasnya di Indonesia*. Tugas kuliah.
- [7].Collett, D. (2003). *Modeling survival data in medical research* (2nd ed.). London: Chapman & Hall.
- [8].Efron, B. & Tibshirani, R. (1993). *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall.

- [9].Fauzy, A. (2000). *Estimasi interval konfidensi dari nilai rata-rata pada sampel berdistribusi t dengan metode bootstrap persentil*. MIHMI, 6(5), 241-245.
- [10].Fauzy, A. (2008). *Selang kepercayaan dari parameter distribusi lognormal menggunakan metode bootstrap persentil*. Jurnal Statistika, Forum Teori dan Aplikasi, 8(2), 13-18.
- [11].Fauzy, A. (2009). *Interval estimation for quantile on two parameters exponential distribution under multiple type II censoring on complex case with bootstrap percentile*. Jurnal Ilmu Dasar (Terakreditasi DIKTI), 10(1), 13-17.
- [12].Fauzy, A. (2010). *Memprediksi interval reliabilitas produk dengan metode bootstrap persentil*. Jurnal Ilmu Dasar (Terakreditasi DIKTI), 11(2), 120-123.
- [13].Fauzy, A. (2011). *Interval Estimation for Quantile on One Parameter Exponential Distribution under Multiple Type-II Censoring*. Proceedings of the 7th ICMSA International Conference on Mathematics, Statistics and its Applications. Thailand.
- [14].Hougaard, P. (2000). *Analysis of multivariate survival data (statistics for biology and health)*. New York: Springer-Verlag.
- [15].Ireson, W. G. (1996). *Handbook of reliability engineering and management* (2nd ed.). New York: McGraw Hill.
- [16].Klein, J. P. & Moeschberger, M. L. (2003). *Techniques for censored and truncated data (statistics for biology and health)* 2nd ed. New York: Springer-Verlag.
- [17].Kleinbaum, D. G. & Klein, J. P. (2005). *Survival analysis: A self-learning text (statistics in the health sciences)* 2nd ed. New York: Springer-Verlag.
- [18].Lawless, J. F. (2003). *Statistical models and methods for lifetime data* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.
- [19].Pham, H. (2003). *Handbook of reliability engineering*. London: Springer-Verlag.
- [20].Therneau, T. M. & Grambsch, P. (2000). *Modeling survival data: extending the Cox model (statistics for biology and health)*. New York: Springer-Verlag.
- [21].Ushakov, I. A. (1994). *Handbook of reliability engineering*. Toronto: John Wiley & Sons.
- [22].Wolstenholme, L. C. (1999). *Reliability modeling: a statistical approach*. Florida: Chapman & Hall.