Statistika, Vol. 14 No. 1, 41 – 50
Mei 2014

Penerapan Estimasi Fast-MCD dan SOCP dalam Pembentukkan Portofolio Robust Mean Variance

Epha Diana Supandi[1,2], Dedi Rosadi[3], Abdurakhman[4]

1Mahasiswa Matematika, FMIPA,UGM.
2Prodi Matematika, UIN Sunan Kalijaga
3,4Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Gadjah Mada

Abstrak

Portofolio model Mean Variance (MV) menitikberatkan pada penggunaan vektor rata-rata dan matriks kovarian dalam pembentukkan portofolio optimal. pembentukkan portofolio menggunakan model MV menjadi optimal, karena $\hat{\Sigma}$ dan $\hat{\mu}$ adalah Maximum Likelihood Estimator bagi Σ dan μ. Pada kenyataanya data keuangan sering menyimpang dari kenormalan, sehingga pembentukkan portofolio robust menjadi sangat penting. Pada penelitian ini akan membandingkan portofolio mean variance melalui pendekatan Fast-MCD dan SOCP (second order cone programming). Hasil studi kasus pada saham yang terdaftar di Jakarta Islamics Index menunjukkan portofolio dengan pendekatan optimisasi robust (SOCP) lebih unggul dibandingkan portofolio model MV maupun Fast MCD.
Kata kunci: Portofolio Mean Variance, SOCP, Fast MCD.

1. PENDAHULUAN

Teori dasar pemilihan portofolio dicetuskan pertama kali oleh Markowitz (1952) yang menjelaskan konsep *mean-variance* dalam mengalokasikan asset dan managemen portofolio aktif. Pada data *return* berdistribusi normal, pembentukkan portofolio menggunakan model *Mean Variance* (MV) menjadi optimal, karena $\hat{\Sigma}$ dan $\hat{\mu}$ adalah *Maximum Likelihood Estimator* bagi Σ dan μ. Pada kenyataannya, distribusi data keuangan sering menunjukkan pola *skewed* dan *heavy tailed.* Hal ini mengakibatkan pembentukkan portofolio menjadi tidak stabil dan tidak optimal karena ada kesalahan estimasi terhadap parameter.

Beberapa penelitian terkait dengan adanya kesalahan estimasi dalam pembentukkan portofolio optimal terhadap model MV telah dilakukan oleh Chopra dan Ziemba (1993), Broadie (1993), Bengtsson (2004) serta Ceria dan Stubbs (2006). Penelitian-penelitian tersebut menyimpulkan bahwa portofolio model MV tidak stabil akibat adanya perubahan pada mean vektor dan matriks varian kovarian. Oleh karena itu perlu dibangun portofolio yang lebih robust dalam arti portofolio yang resisten meskipun ketika adanya penyimpangan dalam data.

Ada dua pendekatan yang sering digunakan pada pemilihan portofolio robust optimal, pertama menggunakan statistik robust dan kedua melalui pendekatan optimisasi robust. Metode statistik robust berusaha membuat estimasi bagi parameter yang stabil ketika ada penyimpangan dalam data. Beberapa penelitian yang menggunakan statistik robust dalam membangun portofolio optimal diantaranya: Lauprette (2002) menggunakan *Least Absolute Deviation* dan Penduga Huber, Vaz-de Melo and Camara (2003) menggunakan penduga *Minimum Covariance Determinant* (MCD), Gentil dan Feser (2004) menggunakan *S-estimator*, Zhou (2006) membandingkan penduga M, Huber dan Fast-MCD, DeMiguel and Nogales (2009) menggunakan *M-Estimator*, Welsh and Zhou (2007) membandingkan Fast MCD, I2D Winsor dan F2D Winsor sedangkan Hu (2012) membandingkan model *Mean Variance* , model MCD *Robustied Mean-Variance* dan model *Mean-CVaR.*

Metode optimisasi robust melakukan pendekatan yang berbeda dalam membentuk portfolio optimal yaitu dengan membuat suatu himpunan ketidakpastian bagi parameter. Himpunan ketidakpastian tersebut dipastikan mengandung semua kemungkinan parameter. Penelitian mengenai portofolio optimal yang dibentuk melalui optimisasi robust dilakukan oleh: Goldfarb dan Iyengar (2003), Tütüncü dan Koenig (2003), Garlappi et.al (2007), Scutella dan Rechia (2009), Fabozy dkk (2010).

Semua penelitian yang telah dilakukan tersebut hanya untuk membandingkan kinerja portofolio klasik (model MV) dengan portofolio robust (statistik robust atau optimisasi robust). Pada semua kasus, kesimpulan mengatakan bahwa teknik robust lebih unggul dibandingkan teknik klasik dalam konteks *return*, risiko maupun nilai *Sharpe Ratio*.

Berdasarkan literatur-literatur yang sudah ada belum pernah ada penelitian yang mengkaji perbandingan antara teknik statistik robust dengan optimisasi robust dalam pemilihan portofolio optimal. Sehingga sangat sulit untuk menentukkan dengan pasti teknik robust mana yang lebih unggul dibandingkan teknik robust lainnya.

Oleh karena itu dalam penelitian ini akan dilakukan perbandingan pembentukkan portofolio optimal melalui pendekatan statistik robust dengan optimisasi robust. Studi kasus pada saham yang terdaftar di bursa *Jakarta Islamics Indek (JII),* dimana perbandingan performa portfolio berdasarkan *rate of return*, risiko serta *Sharpe ratio*.

2. PORTOFOLIO MEAN VARIANCE

Portofolio adalah sekumpulan aset (Husnan 2005), sedangkan menurut Tandelillin (2001) portofolio merupakan kombinasi atau gabungan atau sekumpulan aset baik berupa *real assets* maupun *financial assets* yang dimiliki investor. Hakikat pembentukkan portofolio adalah untuk mengurangi risiko dengan cara diversifikasi, yaitu mengalokasikan sejumlah dana pada berbagai alernatif investasi.

Misalkan investor membentuk portofolio dari p aset. *Return* portofolio adalah rata-rata terboboti dari setiap aset yaitu $r_{port} = w_1 r_1 + \cdots + w_p r_p = w^T r$. Maka *expected return* dan varian portofolio adalah:

$$E(r_{port}) = w_1\mu_1 + \cdots + w_p\mu_p = w^T\mu \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(r_{port}) &= \mathrm{Var}\,(w_1 r_1 + \cdots + w_p r_p) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j} w_i w_j \sigma_{ij} = w^T\Sigma w\end{aligned} \tag{2}$$

dimana:

w_i = bobot aset ke-i, $\forall i = 1,2 \ldots, p$
r_i = *return* aset ke-i, $\forall i = 1,2 \ldots, p$
μ_i = *expected return* aset ke-i, $\forall i = 1,2 \ldots, p$
σ_i^2 = variansi aset ke-i, $\forall i = 1,2 \ldots, p$
σ_{ij} = kovariansi aset ke-i dengan aset ke-j $\forall\, i,j = 1,2 \ldots, p$

Pembentukkan portofolio optimal dengan menggunakan model *Mean Variance* (MV) diperkenalkan oleh Markowitz (1952). Teori ini menekankan pada penggunaan *mean* sebagai tingkat keuntungan yang diharapkan sedangkan *variance* mengukur risiko. Portofolio model MV dirumuskan sebagai berikut:

$$\max_w \quad \mu^T w - \frac{1}{2}\gamma\, w^T\Sigma w. \tag{3a}$$

$$\text{kendala} \qquad e^T w = 1. \tag{3b}$$

Dimana γ adalah koefisien *risk aversion* atau disebut indeks risiko. Ketika γ bernilai kecil (keengganan investor akan risiko dikategorikan rendah), mengakibatkan portofolio lebih berisiko (*risky*). Sebaliknya, ketika γ bernilai besar (keengganan investor akan risiko tinggi) akan dihasilkan portofolio dengan risiko yang kecil.

3. PORTFOLIO ROBUST

3.1. Statistik Robust

Statistik robust berkaitan dengan membangun prosedur statistik yang stabil ketika ada bagian dari data yang tidak sesuai dengan distribusi yang diasumsikan, dan khususnya ketika terdapat *outlier* (pengamatan terpencil). Pembahasan tentang statistik robust telah dikembangkan oleh Huber (1984) , Staudle dan Sheather (1990), selanjutnya dikembangkan oleh Maronna, et.al. (2006).

Secara khusus, statistik robust dapat digunakan untuk menghasilkan penduga robust yang memberikan informasi yang berarti meskipun asumsi statistik empirik berbeda dari yang diasumsikan. Banyak aplikasi yang berdasarkan statistik robust telah diusulkan dalam pemilihan portofolio optimal, dengan menggunakan penduga robust yang berbeda-beda.

Penduga r*obust* yang mempunyai *breakdown* tinggi diantaranya adalah *Minimum Covariance Determinant* (MCD), metode ini diperkenalkan oleh Rousseuw (1984). Penduga MCD bertujuan mencari h pengamatan dari total pengamatan (n), dimana matriks kovarian mempunyai determinan paling kecil.

Misalkan $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, r_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n)'$merupakan kumpulan data sejumlah n pengamatan terdiri dari p-variabel, dimana $n \geq p + 1$. Penduga MCD merupakan pasangan $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^p$ dan $\boldsymbol{S}$ adalah matriks definit positif simetris berdimensi p x p dari suatu sub sampel berukuran h pengamatan dimana $\frac{(n+p+1)}{2} \leq h \leq n$ dengan:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \boldsymbol{r}_i \quad (4)$$

Dan $\boldsymbol{S}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} (\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{T_i})(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{T_i})' \quad (5)$$

Pada tahun 1999, Rousseeuw dan Van Diressen mengusulkan metode FAST-MCD dimana metode ini pengembangan dari MCD. Penduga FAST MCD lebih efisien meskipun n > 20. Metode Fast-MCD disebut juga dengan istilah *C-Steps* (*Concentration Step*), karena metode ini "*concentrate*" pada h pengamatan dengan jarak terkecil dan $\boldsymbol{S}_2$ "*more concentrate*" dalam arti mempunyai determinan lebih kecil dibanding $\boldsymbol{S}_1$.

3.2. Teorema C-Step (Rousseeuw dan Van Diressen, 1999):

Misalkan $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, r_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n)'$merupakan kumpulan data sejumlah n pengamatan terdiri dari p-variabel. Misal $H_1 \subset \{1,2, \ldots, n\}$ dengan sejumlah elemen H1, dengan $|H_1| = h$, tetapkan: $\boldsymbol{T_1} := \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \boldsymbol{r}_i$ dan $\boldsymbol{S_1} := \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{T_1})(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{T_1})'$. Jika $det(\boldsymbol{S}_1) \neq 0$, maka jarak relatif: $d_1(i) = \sqrt{(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{T_1})' S_1^{-1} (\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{T_1})}$, i =1, 2,…, n.

Selanjutnya ambil H_2 sedemikian sehingga $\{d_1(i); i \in H_2\} := \{(d_1)_{1:n}, (d_1)_{2:n}, \ldots, (d_1)_{h:n}\}$, dimana $(d_1)_{1:n} \leq (d_1)_{2:n} \leq \cdots \leq (d_1)_{h:n}$ menyatakan urutan jarak, dan hitung $\mathbf{T}_2$ dan $\mathbf{S}_2$ berdasarkan $\mathbf{H}_2$, maka $det(\boldsymbol{S}_2) \leq det(\boldsymbol{S}_1)$ dan akan sama jika dan hanya jika $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ dan $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$.

Untuk lebih jelasnya, berikut ini tahapan-tahapan dalam teorema *C-Steps*:

1. Ambil himpunan bagian dari matriks $\boldsymbol{r}$ yang terdiri atas $h = \frac{(n+p+1)}{2}$ pengamatan dan dilambangkan dengan H_1.
2. Hitung vektor rata-rata $(\boldsymbol{T_1})$ dan matriks kovarian $(\boldsymbol{S_1})$.
3. Hitung jarak mahalanobis $d_1(i) = \sqrt{(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{T_1})' S_1^{-1} (\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{T_1})}$.
4. Urutkan $d_1(i)$ dari yang terkecil ke nilai yang terbesar.
5. Definisikan himpunan bagian baru dengan H_2. sedemikian sehingga $\{d_1(i); i \in H_2\} := \{(d_1)_{1:n}, (d_1)_{2:n}, \ldots, (d_1)_{h:n}\}$, dimana $(d_1)_{1:n} \leq (d_1)_{2:n} \leq \cdots \leq (d_1)_{h:n}$.
6. Hitung vektor rata-rata $(\boldsymbol{T_2})$, matriks kovarian $(\boldsymbol{S_2})$ dan $d_2(i)$
7. Ulangi langkah 1 sampai langkah 6 sampai ditemukan bahwa $det(\boldsymbol{S}_2) \leq det(\boldsymbol{S}_1)$

3.3. Second Order Cone Programming (SOCP)

Portofolio optimal model MV tanpa himpunan ketidakpastian bagi parameter dapat diselesaikan dengan metode pengali Lagrange atau kondisi Kuhn Tucker. Optimisasi portofolio robust bekerja pada kasus terburuk parameter (himpunan ketidakpastian), lebih cepat diselesaikan dengan menggunakan *Second Order Cone Programming* (SOCP).

Second Order Cone Programming adalah salah satu sub kelas pemrograman konveks nonlinier. Menurut Lobo (1998) SOCP adalah masalah optimisasi yang mempunyai bentuk sebagai berikut:

meminimumkan $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$ (6a)

dengan kendala $\left\|\mathbf{A}_i^T\mathbf{w} + \mathbf{c}_i\right\| \leq \mathbf{b}_i^T\mathbf{w} + d_i$ untuk i = 1,2,…, q (6b)

Dimana $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^p$ adalah variabel keputusan, parameter , parameter $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^p$. Sedangkan $\|.\|$ merupakan norm euclid, yaitu $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}$.

Kendala dalam persamaan (7b) disebut dengan kendala Second Order Cone. Menurut Bazaraa *et.al* (2006) yang dimaksud dengan *Second Order Cone* didefinisikan berikut ini:

Definisi 1 (Second order cone)

Sebuah second-order cone berdimensi k didefinisikan sebagai

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} : t \in R, \mathbf{u} \in R^{k-1} \text{ untuk } \|\mathbf{u}\| \le t \right\} \quad (7)$$

Dimana **u** berada dalam vektor berdimensi k - 1 dan t merupakan skalar.

3.4. Optimisasi Robust

Salah satu cara membentuk portofolio robust adalah dengan menggunakan metode optimisasi robust. Menurut Ben-Tal dan Nemirovski (1998): optimisasi robust adalah suatu pendekatan untuk memecahkan masalah optimisasi dimana parameter tidak diketahui tetapi berada dalam himpunan ketidakpastian yang terbatas (*bounded uncertainty sets*). Himpunan ketidakpastian tersebut diyakini mengandung semua atau paling banyak dari semua kemungkinan parameter. Oleh karena itu, optimisasi robust menentukkan portofolio optimal dibawah sekenario kasus terburuk parameter berada dalam himpunan ketidakpastian.

Portofolio optimal diperoleh dengan menyelesaikan masalah optimisasi berikut ini:

$$\max_w \left\{ \min_{\mu \in U_\mu} \mu^T w \right\} - \left\{ \max_{\Sigma \in U_\Sigma} \frac{1}{2} \gamma\, w^T \Sigma w \right\}. \quad (8a)$$

$$\text{kendala} \qquad e^T w = 1. \quad (8b)$$

Ada banyak cara yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan himpunan ketidakpastian. Pada penelitian ini himpunan ketidakpastian yang digunakan adalah dalam bentuk selang seperti yang diusulkan oleh Engels (2004). Interval bagi parameter sebagai berikut:

$$\mu_i^L \le \mu_i \le \mu_i^U \quad , i = 1,2, \dots, p \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}^L \le \sigma_{ij} \le \sigma_{ij}^U \quad , i, j = 1,2, \dots, p \quad (10)$$

Di mana p adalah banyaknya aset dalam portofolio. Notasi di atas dapat diubah bentuknya dengan memisalkan $\mu_i^0 = (\mu_i^L + \mu_i^U)/2$, $\beta_i = (\mu_i^U - \mu_i^L)/2$, $\sigma_{ij}^0 = (\sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^U)/2$ dan $\delta_{ij} = (\sigma_{ij}^U - \sigma_{ij}^L)/2$ menjadi:

$$\mu_i^0 - \beta_i \le \mu_i \le \mu_i^0 + \beta_i \qquad \forall i \quad (11)$$

$$\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij} \le \sigma_{ij} \le \sigma_{ij}^0 + \delta_{ij} \qquad \forall i, j \quad (12)$$

Jadi himpunan ketidakpastian dari mean return U_μ dan kovariansi U_Σ dapat dinyatakan sebagai

$$U_\mu = \{\mu : \mu^0 - \beta \le \mu \le \mu^0 + \beta,\ \beta \ge 0\} \quad (13)$$

$$U_\Sigma = \{\Sigma : \Sigma^0 - \Delta \le \Sigma \le \Sigma^0 + \Delta,\ \Delta \ge 0\} \quad (14)$$

Diasumsikan bahwa himpunan ketidakpastian bagi parameter vektor mean dan matriks kovarian bersifat bebas, maka solusi persamaan (8a) dan (8b) dapat diselesaikan berikut:

Untuk *expected return* minimum:

$$\begin{aligned}
\min_\mu [\mu^T w] &= \min_\mu \sum_i \mu_i w_i \\
&= \sum_{i:w_i<0} (\mu_i^0 + \beta_i) w_i + \sum_{i:w_i \ge 0} (\mu_i^0 - \beta_i) w_i \\
&= \sum_i \mu_i^0 w_i + \sum_{i:\theta_i<0} \beta_i w_i - \sum_{i:\theta_i \ge 0} \beta_i w_i \\
&= \sum_i (\mu_i^0 w_i - \beta_i |w_i|) \\
&= (\mu^0)^T w - \beta^T |w| \qquad (15)
\end{aligned}$$

Untuk risiko terburuk yaitu ketika variansi maksimum:

$$\max_\Sigma w^T \Sigma w = \max_\Sigma \sum_{i,j} \sigma_{ij} w_i w_j$$

$$= \sum_{i,j,w_i w_j<0} (\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij}) w_i w_j + \sum_{i,j:w_i w_j \geq 0} (\sigma_{ij}^0 + \delta_{ij}) w_i w_j$$
$$= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 w_i w_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |w_i w_j|$$
$$= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 w_i w_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |w_i||w_j|$$
$$= w^T \Sigma^0 w - |w^T| \Delta |w| \qquad (16)$$

Dengan demikian optimisasi pada (8a – 8b) dapat disederhanakan menjadi

$$\max_w (\mu^0)^T w - \beta^T |w| - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma^0 w - |w^T| \Delta |w| \qquad (17)$$
$$\text{kendala} \quad e^T w = 1. \qquad (18)$$

Fungsi di atas dapat diubah ke dalam bentuk SOCP dengan menambahkan variabel ρ dan τ ke dalam fungsi tujuan, sehingga diperoleh

$$\text{memaksimumkan } (\mu^0)^T w - \beta^T |w| - \tfrac{1}{2}\gamma\rho - \tfrac{1}{2}\gamma\tau \qquad (19a)$$
$$\text{dengan kendala} \quad \bar{1}^T \theta = 1 \qquad (19b)$$
$$\rho \geq w^T \Sigma^0 w \qquad (19c)$$
$$\tau \geq |w^T| \Delta |w| \qquad (19d)$$

Karena Σ^0 matriks definit positif, w vektor kolom dan ρ dan τ skalar, maka berlaku

$$w^T \Sigma^0 w \leq \rho$$
$$\Leftrightarrow \Sigma^0 w^T \Sigma^0 w \leq \Sigma^0 \rho$$
$$\Leftrightarrow \Sigma^0 w^T \Sigma^0 w - 2\rho + \rho^2 + 1 \leq 2\rho + \rho^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow \Sigma^0 w^T (\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} (\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} w + (1-\rho)^2 \leq (1+\rho)^2$$
$$\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} w \\ 1-\rho \end{pmatrix} \right\| \leq (1+\rho)$$

dan

$$\left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} w \\ 1-\tau \end{pmatrix} \right\| \leq (1+\tau)$$

sehingga diperoleh permasalahan berikut

$$\text{memaksimumkan } (\mu^0)^T w - \beta^T |w| - \tfrac{1}{2}\gamma\rho - \tfrac{1}{2}\gamma\tau \qquad (20a)$$
$$\text{dengan kendala} \quad e^T w = 1 \qquad (20b)$$
$$\left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^0)^{1/2} w \\ 1-\rho \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\rho \qquad (20c)$$
$$\left\| \begin{pmatrix} 2\Delta^{1/2} |w| \\ 1-\tau \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\tau \qquad (20d)$$

Untuk mengatasi masalah tanda mutlak pada w, $|w|$ dapat diganti dengan vektor η yang berdimensi n dan menambah fungsi kendala $\eta_i \geq w_i$ dan $\eta_i \geq -w_i$ untuk setiap i yang menjamin $\eta_i \geq |w_i|$ yang menghasilkan masalah SOCP berikut

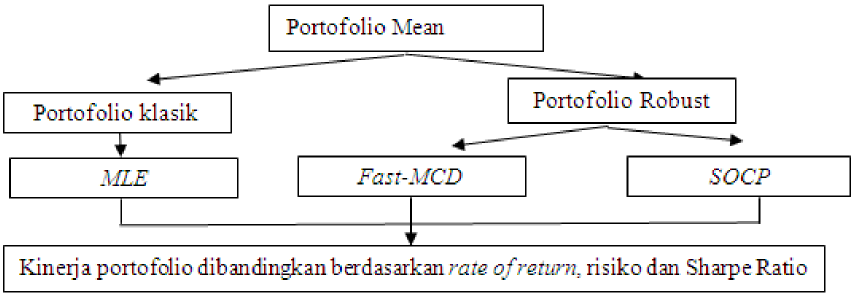
$$\text{meminimumkan } -(\mu^0)^T w + \beta^T \eta + \tfrac{1}{2}\gamma(\rho + \tau) \qquad (21a)$$
$$\text{dengan kendala} \quad e^T w = 1 \qquad (21b)$$
$$\left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^0)^{1/2} w \\ 1-\rho \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\rho \qquad (21c)$$
$$\left\| \begin{pmatrix} 2\Delta^{1/2} \eta \\ 1-\tau \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\tau \qquad (21d)$$
$$\eta_i \geq w_i, \ \forall i \qquad (21e)$$
$$\eta_i \geq -w_i, \quad \forall i \qquad (21f)$$

Masalah optimisasi (21a – 21f) di atas merupakan masalah SOCP dengan tambahan kendala linear.

4. METODE PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan perbandingan statistik robust dengan optimisasi robust dalam masalah pemilihan portfolio optimal. Sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah saham yang terdaftar di Bursa Efek Jakarta dan tergabung dalam Jakarta Islamic Index (JII) periode 1 Januari 2012 – 31 Desember 2012 (www.finance.yahoo.com). Performa portofolio ditekankan pada nilai rate of return, variance dan sharpe ratio.

Alur penelitian ini digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1. Alur Penelitian

Pada kasus ini portofolio optimal dengan menggunakan teknik robust, dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Pada metode Fast-MCD *breakdown point* sebesar 10%.
2. Koefisien *risk aversion* (γ) yang digunakan sebesar 5, 10, 25, 50, 100.
3. Portofolio optimal dengan pendekatan optimisasi robust akan dibawa ke dalam bentuk *second-order cone programming* (SOCP).

Pengolahan data dilakukan dengan menggunakan software R dan Matlab R2010a.

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Perusahaan yang terpilih dalam studi kasus ini ada delapan perusahaan yaitu: Alam Sutera Realty Tbk (ASRI), Indofood Sukses Makmur Tbk (INDF), Jasa Marga Tbk (JSMR), Telekomunikasi Indonsesia (TLKM), Timah Tbk (TINS), Akr Corporindo Tbk (AKRA), Charoen Pokhphan Indonesia Tbk (CPIN) dan XL Axiata Tbk (EXCL). Mean dan variansi kedelapan perusahaan disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Mean dan Variansi Return Ke delapan Saham Terpilih

	ASRI	AKRA	EXCEL	JSMR	TINS	TLKM	INDF	CPIN
Mean	0.00258	0.00173	0.00097	0.00135	-0.00173	0.00143	0.00146	0.00269
Variansi	0.00053	0.00045	0.00059	0.00021	0.00288	0.00028	0.00059	0.00047

Berdasarkan Tabel 1, dapat diamati bahwa saham TINS mempunyai performansi yang paling buruk dibandingkan ke tujuh saham lainnya. Hal ini diindikasikan dengan tingkat return yang negatif, sehingga saham TINS mengalami kerugian, selain itu tingkat risikonya juga sangat tinggi yaitu sebesar 0.288%. Kinerja saham yang bagus ditunjukkan oleh perusahaan CPIN dengan tingkat return sebesar 0.269% dan risiko sebesar 0.047%.

5.1. Bobot Portofolio

Pada bagian ini, analisis terhadap bobot portofolio akan dibandingkan antara portofolio klasik dengan portofolio robust. Hasil pembentukkan portofolio optimal dengan nilai averse 5, 10, 25, 50 dan 100 disajikan pada Tabel 2.

Berdasarkan tabel di atas dapat diamati bahwa, ke tiga model portofolio menghasilkan bobot optimal yang berbeda-beda. Pada pembentukkan portofolio optimal model MV terjadi short selling pada saham TINS. Sedangkan pada portofolio Fast-MCD, peristiwa short selling terjadi pada saat nilai γ = 5 dan 10. Berbeda dengan ke dua model sebelumnya, pada portofolio model

SOCP semua bobot bernilai positif, hal ini menunjukkan tidak terjadi short selling. Dari Tabel 2 terlihat bahwa pada model SOCP saham TINS tidak pernah disertakan dalam portofolio, alasannya karena saham TINS ini mempunyai performansi yang buruk, yaitu return negatif dan risiko besar.

Tabel 2. Bobot Portofolio

Model	ASRI	AKRA	EXCL	JSMR	TINS	TLKM	INDF	CPIN
MV(γ = 5)	0.4939	0.0482	-0.1120	-0.1522	-0.3996	-0.0107	0.5428	0.5896
MV (γ = 10)	0.2823	0.0655	-0.0035	0.0886	-0.2146	0.1087	0.3393	0.3337
MV (γ = 25)	0.1553	0.0759	0.0616	0.2330	-0.1036	0.1803	0.2172	0.1802
MV (γ = 50)	0.1129	0.0794	0.0833	0.2812	-0.0666	0.2042	0.1765	0.1290
MV (γ = 100)	0.0918	0.0811	0.0942	0.3053	-0.0481	0.2161	0.1562	0.1034
FMCD (γ = 5)	-0.0518	0.2246	0.2054	0.4292	-0.1802	-0.0492	0.4180	0.0040
FMCD (γ = 10)	-0.0032	0.1240	0.1595	0.3619	-0.0279	0.0878	0.2924	0.0058
FMCD (γ = 25)	0.0026	0.0636	0.1319	0.3216	0.0635	0.1699	0.2170	0.0065
FMCD (γ = 50)	0.0358	0.0434	0.1228	0.3081	0.0939	0.1973	0.1919	0.0068
FMCD (γ = 100)	0.0407	0.0334	0.1182	0.3014	0.1092	0.2110	0.1793	0.0069
SOCP (γ = 5)	0	0	0	0	0	0	0	1.00
SOCP(γ = 10)	0	0	0	0.0627	0	0	0	0.9373
SOCP(γ = 25)	0	0	0	0.4397	0	0.0887	0	0.4716
SOCP(γ = 50)	0	0	0	0.5228	0	0.1913	0	0.2851
SOCP(γ = 100)	0.0301	0.0468	0.0284	0.5194	0	0.2151	0.0104	0.1498

Ket: MV = Mean Variance,
FMCD = Fast Minimum Covariance Determinant,
SOCP = Second Order Cone Programming.

5.2. Analisis Performansi

Adanya perbedaan bobot optimal pada ketiga mode portofolio tentu berpengaruh terhadap expected return dan risiko portofolio. Maka pada bagian ini, kinerja ketiga portofolio tersebut akan dibandingkan dengan memperhatikan besar keuntungan portofolio, rate of return serta nilai Sharpe Ratio.

Untuk membandingkan kinerja portofolio, dimisalkan seorang investor menginvestasikan dana sebesar 1 milyar rupiah pada portofolio MV, Fast-MCD serta SOCP dengan koefisien *risk aversion* sebesar 50 dan 100. Pembelian saham dilakukan pada tanggal 10 April 2013. Alokasi dana pada masing-masing portofolio disajikan pada Tabel 3.

Langkah selanjutnya melihat harga penutupan kedelapan saham pada periode 11 – April 2013 – 30 Mei 2013, sehingga terdapat 35 periode pengamatan. Keuntungan yang diperoleh untuk setiap periode pengamatan disajikan pada Tabel 4.

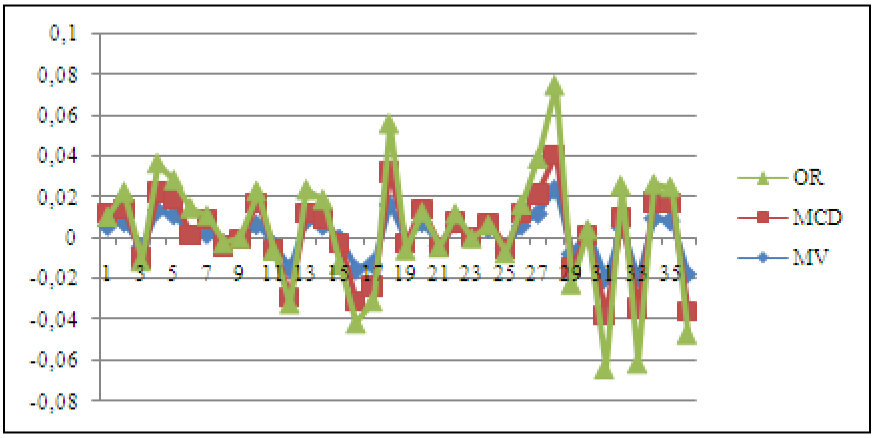
Tabel 3. Alokasi Dana Portofolio pada γ = 50

Saham	Harga saham (10/4/13)	MV		Fast-MCD		SOCP	
		Investasi (x 10^6)	Jumlah Saham	Investasi (x 10^6)	Jumlah Saham	Investasi (x 10^6)	Jumlah Saham
ASRI	980	91.8	93673.47	40.7	41530.61	0	0
AKRA	5000	81.1	16220	33.4	6680	0	0
EXCEL	5400	94.2	17444.44	118.2	21888.89	0	0
JSMR	6350	305.3	48078.74	301.4	47464.57	522.8	82330.71
TINS	1410	-48.1	-34113.5	109.2	77446.81	0	0
TLKM	10750	216.1	20102.33	211	19627.91	191.3	17795.35
INDF	7500	156.2	20826.67	179.3	23906.67	0	0
CPIN	4700	103.4	22000	6.9	1468.085	285.1	60659.57

Tabel 4. Keuntungan Portofolio MV, FMCD dan OR

Date	MV	FMCD	OR
11/04/2013	6349671	6127183	-1984187,6
12/04/2013	14539469	12362828	6318139,53
15/04/2013	10307337	6744550	4801650,17
16/04/2013	24449138	15788375	18511838,2
17/04/2013	36418749	24322943	27077210,8
18/04/2013	38631001	23843421	40517846,3
19/04/2013	41049401	30982756	42321283,4
22/04/2013	38494351	29591345	43837772,7
23/04/2013	38494351	29591345	43837772,7
24/04/2013	45654374	40292623	49803099,3
25/04/2013	42722155	38078301	48650286,3
26/04/2013	27771586	23388677	44928801,9
29/04/2013	37166277	27236540	56264107,8
30/04/2013	43916443	30403884	66152180,5
01/05/2013	44067121	27723289	55149176,4
02/05/2013	28231761	11991477	43450194,2
03/05/2013	15620379	776128,7	35636076,5
06/05/2013	32649272	16739677	59823177,5
07/05/2013	31809890	15379423	55969687,6
08/05/2013	40074521	22352146	53632687,1
09/05/2013	36432181	21470949	53632687,1
10/05/2013	44200575	22186756	57555433,2
13/05/2013	45067074	22268627	56689567,9
14/05/2013	50419697	24710950	55606011,2
15/05/2013	45741721	23881659	53462799,9
16/05/2013	52483015	30160864	57579335,4
17/05/2013	65415633	40221360	75368177,2
20/05/2013	91307760	57613875	111493404
21/05/2013	83267124	50497376	102370566
22/05/2013	85999020	49707175	105015966
23/05/2013	64644952	30966374	75915720,2
24/05/2013	70999725	35959096	91994283,4
27/05/2013	50429126	20299822	62700248,6
28/05/2013	61005277	28446719	71629297,7
29/05/2013	70337499	37326834	79692481,4
30/05/2013	51835789	18230312	67737926,1

Hasil pengamatan terhadap Tabel 4. Dapat diamati bahwa selama 35 hari pengamatan, sebagian besar portofolio SOCP memberikan tingkat keuntungan yang lebih besar dibandingakn model portofolio MV maupun FMCD. Untuk lebih jelasnya adalah dengan memperhatikan grafik *rate of return* portofolio untuk 35 pengamatan. Hasilnya dapat dilihat pada grafik di bawah ini.



Gambar 2. Pergerakan *rate of return* Portofolio MV, FMCD dan OR

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat bahwa volatilitas portofolio SOCP paling besar dibandingkan portofolio MV maupun FMCD. Hal ini disebabkan karena model COCP bekerja pada asumsi kasus terburuk, yaitu ketika *expected return* paling kecil dan risiko maksimum. Volatilits portofolio model FMCD cukup tinggi juga jika dibandingkan dengan portofolio model MV. Pada Gambar 2 ditunjukkan bahwa volatilitas portofolio paling kecil jika dibandingkan kedua model lainnya.

Untuk membandingkan performansi ketiga portofolio, maka selanjutnya dihitung mean, standar deviasi dan sharpe ratio. Hasil selengkapnya disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Perbandingan mean, standar deviasi dan Sharpe Ratio

	MV	**FMCD**	**OR**
Mean	0.001456	0.000541	0.001890
Standar deviasi	0.010333	0.008969	0.011816
Sharpe ratio	0.140980	0.060336	0.159955

Tabel 5 memperlihatkan bahwa *expected return* portofolio FMCD paling kecil hanya sebesar 0.0541%, dengan risiko sebesar 0.89%. Sedangkan portofolio MV menghasilkan mean sebesar 0.14% dengan risiko sebesar 1.03%. Portofolio OR memberikan *expected return* paling besar yaitu 0.189% dengan risiko sebesar 1.18%. Nilai *sharpe ratio* paling besar ditunjukkan oleh portofolio OR sebesar 15.99%, selanjutnya diikuti oleh portofolio MV dengan nilai *sharpe ratio* 14.09% dan portofolio FMCD berada diurutan terakhir dengan nilai *sharpe ratio* sebesar 6.03%. Pada kasus ini, dengan asumsi investor menyukai risiko (γ = 50) dapat disimpulkan bahwa portofolio SOCP memiliki kinerja lebih baik daripada portofolio model MV dan FMCD.

6. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil perhitungan dan analisis data dapat diambil beberapa kesimpulan pada studi kasus ini yaitu: Portofolio optimal model MV, FMCD dan SOCP memberikan bobot yang berbeda. Hasil perhitungan *Sharpe ratio* pada γ = 50 menunjukkan bahwa portofolio melalui pendekatan optimisasi robust (SOCP) lebih unggul dibandingkan portofolio MV dan FMCD.

Pada studi kasus ini, untuk dapat lebih menggeneralisasikan perbandingan portofolio klasik dan robust perlu dilakukan analisis performansi pada berbagai tingkat risk aversion. Perlu juga dilakukan penelitian lanjutan dengan mengggunakan pengamatan yang lebih banyak lagi, baik perusahaan atau asset dan periode pengamatan.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M. (2006). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms . (3rd Edition). John Wiley and Sons, Inc. New Jersey.

[2]. Ben-Tal, A., and Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. Mathematics of Operations Research, 23: 1769-805.

[3]. Bengtsson, C. (2004). The Impact of Estimation Error on Portfolio Selection for Investor with Constat Relative Risk Aversion.

[4]. Best, M. J., and Grauer, R. R. (1991). On the sensitivity of mean-variance efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. Review of Financial Studies, 4(2), 315-342.

[5]. Broadie, M. (1993). Computing efficient frontiers using estimated parameters. Annals of Operations Research, 45, 21-58.

[6]. Ceria, S., and Stubbs, R. A. (2006). Incorporating estimation errors into portfolio selection: robust portfolio construction. Journal of Asset Management, 7(2), 109-127.

[7]. Chopra, V. K. and Ziemba,W. T. (1993). The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. Journal of Portfolio Management, 19(2), 6-11.

[8]. DeMiguel, V. and Nogales, F. J. (2008). Portfolio selection with robust estimation. Technical Report, London Business School.

[9]. Engels, M., 2004, Portfolio Optimization: Beyond Markowitz, Thesis, Universiteit Leiden, Leiden

[10]. Fabozzi , F.Z., Huang, D. and Zhou, G. (2010). Robust portfolios: contributions from operations research and finance. The Journal of Operation Research . 176: 191-220.

[11]. Garlappi, L., Uppal, R., and Wang, T. (2007). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: a multi-prior approach. Review of Financial Studies, 20(1), 41-81.

[12]. Gentil, P.C and Feser.V.MP (2004). Robust Mean Variance Portfolio Selection. Working Paper 173, National Centre of Competence in Research NCCR FINRISK.49

[13]. Goldfarb, D., and Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. Mathematics of Operations Research, 28, 1-38.

[14]. Hu, J. (2012). An Empirical Comparison of Different Approaches in Portfolio Selection. U.U.D.M. Project Report 2012:7.

[15]. Huber, R. J. (1981). Robust statistics. New York: Wiley.

[16]. Husnan, S. (2005). Dasar-dasar Teori Portfolio dan Analisis Sekuritas. Edisi ke 4. UPP AMP YKPN. Yogyakarta

[17]. Lauprete, G.J. (2001). Portfolio risk minimization under departures from normality. PhD thesis, Sloan school of Management, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge,MA.

[18]. Lobo, M. S. et.al. (1998). Application of Second-Order Cone Programming, Journal of Linear Algebra and Its Application, 284, 193-228.

[19]. Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 7: 77-91.

[20]. Maronna, R.A., Martin, R., and Yohai, V.J. (2006). Robust Statistics: Theory and Methods. John Wiley & Sons, Chichester, England.

[21]. Recchia R. And Scutella (2009). Robust Portfolio Asset Allocation : Models and algorithmic approach. Technical Report (TR-09-01)

[22]. Rousseeuw, P.J. (1984). Least median of squares regression. Journal of the American Statistical Association, 79:871–880.

[23]. Rousseeuw, P.J. and K. Van Driessen (1999). A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator. Technometrics, 41, 212–223.

[24]. Staudte, R.G. and Sheather, S.J. (1990). Robust Estimation and Testing. John Wiley and Sons Inc.

[25]. Tandelilin, E. (2001). Analisis Investasi dan Manajemen Portofolio Edisi Pertama. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

[26]. Tütüncü, R. and Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. Annals of Operations Research, 13: 157-187.

[27]. Vaz-de Melo, B., R. P. Camara. 2003. Robust modeling of multivariate financial data. Coppead Working Paper Series 355, Federal University at Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.

[28]. Welsh. R.Y. and Zhou. (2007). Application of Robust Statistics to Asset Allocation Models. Statistical Journal. 5(1): 97-114.