Statistika, Vol. 14 No. 2, 97 – 100
November 2014

Derajat Ketaksesuaian dan Derajat Kedivergenan Kalman filter

SUTAWANIR DARWIS, ACENG KOMARUDIN MUTAQIN, YAYAT KARYANA, MOHAMMAND SOBRI

Program Studi Statistika Universitas Islam Bandung
Email: sdarwis@math.itb.ac.id

ABSTRAK

Tulisan ini membahas beberapa ukuran derajat ketaksesuaian dan derajat kekonvergenan Kalman filter yang didefinisikan melalui matriks kovariansi. Pencilan mempengaruhi kinerja penaksiran state. Dijabarkan pengaruh pencilan terhadap taksiran state dan kovariansi error.

Kata kunci: derajat ketaksesuaian, derajat kedivergenan, pencilan

1. Pendahuluan

Masalah utama pada model state-space adalah penaksiran state berdasarkan observasi $\{Y_s, s = 1,\ldots,t\}$. Kinerja metode estimasi dipengaruhi oleh additive-outlier. Pada desain Kalman filter, divergence disebabkan error pemodelan merupakan hal yang kritikal. Implementasi Kalman filter membutuhkan informasi noise proses dan noise pengukuran. Statistik noise dapat mempengaruhi kinerja Kalman filter dan dapat mendorong terjadinya filter divergence. Jika pola kovariansi model tidak sesuai dengan kovariansi actual (empirik) masalah divergence akan muncul. Beberapa ukuran telah dikembangkan terkait filter divergence; konsisten, covariance matching, derajat ketaksesuaian (degree of mismatch, DOM), deajad kedivergenan (degree of divergence, DOD). Tulisan ini membahas aspek filter divergence dikaitkan dengan pencilan (outlier) pada Kalman filter.

2. Metodologi

Misalkan suatu model state-space linear berikut

$$X_t = \Phi X_{t-1} + w_{t-1}, w_t \sim N(0,Q)$$

$$Y_t = HX_t + v_t, v \sim N(0,R)$$

$$\hat{X}_0(+) = \hat{X}_0, P_0(+) = P_0$$

Taksiran takbias linear $\hat{X}_t(+)$ untuk state X_t berdasarkan observasi $\{Y_1,\ldots,Y_t\}$ diberikan oleh iterasi Kalman filter

$$\hat{X}_t(-) = \Phi\hat{X}_{t-1}(+)$$

$$P_t(-) = \Phi P_{t-1}(+)\Phi^T + Q$$

$$\hat{X}_t(+) = \hat{X}_t(-) + K_t\left[Y_t - H\hat{X}_t(-)\right]$$

$$K_t = P_t(-)H\left[HP_t(-)H^T + R\right]^{-1}$$

$$P_t(+) = \left[I - K_t H\right]P_t(-)$$

Konsisten (takbias dan covariance matching) bila

$$E\left[X_t - \hat{X}_t\right] = E\left(\tilde{X}_t\right) = 0$$

$$E\left[\left(X_t - \hat{X}_t\right)\left(X_t - \hat{X}_t\right)^T\right] = E\left[\tilde{X}_t\tilde{X}_t^T\right] = P_t$$

Dari observasi Y_t dan prediksi $\hat{X}_t(-)$ didefinisikan error (residual)

$$v_t = Y_t - H\hat{X}_t(-)$$

Matriks kovariansi error

$$C_{v_t} = E\left(v_t v_t^T\right) = HP_t(-)H^T + R$$
$$= H\left[\Phi P_t(-)\Phi_t^T + Q\right]H^T + R$$

Matriks kovariansi empirik

$$\hat{C}_{v_t} = \frac{1}{n}\sum_{j=j_0}^{t} v_j v_j^T$$

Derajat ketaksesuaian didefinisikan sebagai selisih kovariansi (Jwo dan Cho, 2007)

$$DOM = C_{v_t} - \hat{C}_{v_t}$$

atau (scalar)

$$DOD = \xi = v_t^T v_t = Tr\left(v_t v_t^T\right)$$

Parameter DOD digunakan untuk mendeteksi divergence/pencilan (outlier). Jika digunakan perbedaan matriks kovariansi actual dengan teoritis

$$DOD = \eta = v_t^T v_t - Tr\left(C_{v_t}\right)$$

Parameter failure detection

$$\mu = \frac{v_t^T v_t}{Tr\left(C_{v_t}\right)} = v_t^T C_{v_t}^{-1} v_t$$

3. Hasil dan Pembahasan

Penaksir takbias $\hat{X}_t(+)$ dari state X_t berdasarkan $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_t\}$ dan kovariansinya $P_t(+) = E\left[\left(X_t - \hat{X}_t(+)\right)\left(X - \hat{X}_t(+)\right)\right]$ diberikan oleh

$$d_t^2 = HPH + R$$

$$\hat{X}_t(+) = \hat{X}_t(-) + P_t(-)H^T\left(d_t^2\right)^{-1}\left[Y_t - H\hat{X}_t(-)\right]$$

$$\hat{X}_t(-) = \Phi\hat{X}_{t-1}(-)$$

$$P_t(+) = P_t(-) - P_t(-)H^T\left(d_t^2\right)^{-1}HP_t(-)$$

$$P_t(-) = \Phi P_{t-1}(+)\Phi^T + Q$$

Pada model state-space normal $X_t \mid \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_t\} \sim N\left(\hat{X}_t(+), P_t(+)\right)$, distribusi bersyarat state diberikan observasi ditentukan oleh output Kalman filter.

Suku $\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y - H\hat{X}_t(-)$ dinamakan error (observasi). Error terpusat, tak-berkorelasi, dan $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = d_t^2$. Pada state-space normal $\varepsilon_t \sim N\left(0, d_t^2\right)$. Kalman filter dikatakan konvergen ke solusi stabil (stable solution) jika matriks kovariansi $P_t(-)$ (dan juga $P_t(+)$) konvergen suatu matriks konstan. Kalman filter konvergen ke solusi stabil jika sekurang-kurangnya satu dari kondisi berikut dipenuhi: - $\left|\lambda_i(\Phi)\right| < 1, i = 1, \ldots, p$, $\lambda_i(\Phi)$ merupakan nilai eigen dari Φ - terdapat matriks S sehingga $\left|\lambda_i\left(\Phi + GS^T\right)\right| < 1, GG^T = Q$, terdapat D sehingga $\left|\lambda_i(\Phi + DH)\right| < 1, i = 1, \ldots, p$

Pencilan (outlier) dimodelkan melalui penggantian alat observasi v_t dengan

$$(1 - Z_t)v_t + Z_t q_t$$

dengan $v_t \sim N(0, R)$, $q_t \sim H_t$, H_t merupakan distribusi terpusat simetri dengan variansi $\psi_t^2 > R$, Z_t merupakan indikator pencilan.

Misalkan Y_t observasi ekstrem dan tidak ada pencilan lain; $Z_j = 1$ untuk $j = t$ dan 0 lainnya, maka $\mathrm{Var}(v_t) = \psi_t^2 > R$. Notasikan $\left(d_t^R\right)^2$ variansi error

$$d_t^2 = HP_t(-)H + R = \left(d_t^R\right)^2 - \psi_t^2 + R = \left(d_t^R\right)^2 - \left(\psi_t^2 - R\right)$$

$$(d_t)^{-2} = \left(d_t^R\right)^{-2} + \frac{\psi_t^2 - R}{\left(d_t^R\right)^2\left[\left(d_t^R\right)^2 - \left(\psi_t^2 - R\right)\right]} = \left(d_t^R\right)^{-2} + \frac{\psi_t^2 - R}{\left(d_t^R\right)^2 (d_t)^2}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t(+) &= \hat{X}_t(-) + P_t(-)H^T(d_t)^{-2}\left(Y_t - H\hat{X}_t(-)\right) \\
&= \hat{X}_t^R(+) + P_t(-)H^T \frac{\psi_t^2 - R}{\left(d_t^R\right)^2 (d_t)^2}\left(Y_t - H\hat{X}_t(-)\right) \\
&= \hat{X}_t^R(+) + \Delta\hat{X}_t(+)
\end{aligned}$$

Kajian propogasi error (Franek, 2002)

$$\hat{X}_{t+1}(-) = \hat{X}_{t+1}^R(-) + \Delta\hat{X}_{t+1}(-)$$

$$\hat{X}_{t+1}(+) = \hat{X}_{t+1}^R(+) + \Delta\hat{X}_{t+1}(+)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\hat{X}_{t+n}(+n) = \hat{X}_{t+n}^R(+n) + \Delta\hat{X}_{t+n}(+n)$$

dan

$$\hat{X}_{t+j}(+j) = \hat{X}^{R}_{t+j}(+j) + A^{t}_{j}\Delta\hat{X}_{t}(+)$$

Pengaruh observasi ekstrim menjadi nol bila A^{t}_{n} mendekati nol. Hasil yang mirip diperoleh untuk $P_t(+)$

$$P_t(+) = P^{R}_{t}(+) - C\left(\psi^2 - R\right)$$

4. Kesimpulan

Derajat ketaksesuaian dan derajat kedivergenan dikuantifikasi melalui matriks kovariansi teoritis dan matriks kovariansi empiris. Kajian pengaruh pencilan pada Kalman filter dapat dilihat dari model pencilan, taksiran state dan kovariansi error.

Daftar Pustaka

[1]. Franek, P,., 2002, On improving sensitity of the kalma filter, Kybernetika vol 38, No 4, 425 – 443.

[2]. Jwo, D J., and Cho T S, 2007, Applied Mathematics and Computation, 193, 482-505.