Statistika, Vol. 6 No. 1, 7 – 11
Mei 2006

Proses Kelahiran dengan Imigrasi dan Kematian Password

SRI MULYANI SANRO'I, NENENG SUNENGSIH DAN GATOT RIWI SETYANTO

Jurusan Statistika FMIPA – Unpad

ABSTRAK

Dalam penelitian dibahas mengenai sebuah model stokastik pertumbuhan populasi password. Dimisalkan bahwa populasi berkembang melalui kedatangan sejumlah netter melalui proses poisson. Populasi kemudian terpecah menjadi beberapa subpopulasi karena adanya mutasi password, dengan jenis password dalam sebuah subpopulasi sama dan berbeda antar subpopulasi. Distribusi stasioner banyak netter dalam sebuah subpopulasi ternyata poisson.

1. Pendahuluan

Pada awalnya sebuah populasi password tidak memiliki individu, selang beberapa waktu kemudian populasi ini memiliki seorang individu yang ,menjadi anggota baru. Populasi password terbentuk melalui kedatanggan netter ke provider dan dianggap bahwa proses kedatangannya mengikuti pola proses poisson dengan rate λ. mungkin dengan alasan keamanan, agar tidak diketahui pihak lain passwordnya dirubah (mutasi), dan apabila dipandang aman passwordnya tidak mengalami perubahan. Netter baru awalnya selalu diberi password yang tidak pernah sama dengan semua yang telah diberikan provider kepada netter-netter sebelumnya.

Sejalan dengan masuknya netter-netter baru dan adanya kemungkinan mutasi password, sebuah mutasi password menjadi password lain mungkin menghasilkan sebuah password yang sama dengan password yang dimiliki netter lain dalam populasi sehingga dalam selang waktu lama akhirnya membentuk sebuah subpopulasi dengan jenis password sama. Selain dari event mutasi, seorang netter mungkin keluar tidak menjadi anggota lagi. Event ini selanjutnya disebut *mati*. Dimisalkan bahwa rate keluar (mutasi atau mati) untuk tiap waktu sama, sebutlah sebesar μ .

Event mutasi pada sebuah password memiliki dua kemungkinan, yaitu pindah ke subpopulasi lain atau menjadi sebuah password yang belum pernah ada, menjadi sebuah mutant. Misalkan peluang bahwa sebuah password mutasi menjadi salah satu password lain yang ada adalah α atau menjadi mutant yang berbeda dengan semua yang ada dengan peluang γ , sedangkan peluang mati dimisalkan β, $\alpha+\beta+\gamma=1$. Kedatangan dan mutasi menyebabkan adanya keanekaan password dan dalam populasi mungkin terdapat beberapa subpopulasi yang masing-masing memiliki jenis password sama akan tetapi untuk subpopulasi berbeda jenis password berbeda, sedangkan banyak netter dalam sebuah subpopulasi berfluktuasi selain karena mutasi juga oleh adanya netter yang mati.

Setelah populasi diamati selama selang waktu (0,t], misalkan terdaftar n netter yang kemudian membentuk m subpopulasi dengan banyak netter dalam tiap subpopulasi adalah $n_1,...,n_m$ dengan $n=n_1+...+n_m$.

Fluktuasi banyak netter dalam sebuah subpopulasi mengikuti sebuah pola birth and death (B-D) proses dengan birth terjadi melalui mutasi bukan melalui reproduksi individu seperti lazimnya dalam sebuah B-D, selain itu sekarang sebuah subpopulasi awalnya tidak memiliki individu. Fluktuasi lebih mirip dengan proses immigasi – emigrasi, dengan immigrasi sekarang berupa mutasi dan emigrasi terdiri dari dua jenis yaitu keluar atau mutasi. Dalam persoalan sekarang, immigrasi dari luar kedalam sebuah subpopulasi berukuran k terbatas pada (n-*k)* individu yang berada disemua subpopulasi lain dalam populasi.

Fenomena fluktuasi jumlah password, apabila jenis password diibaratkan sebagai allele (gene type), mirip dengan sebuah masalah evolusi frekuensi allele dalam Population Genetics, teristimewa dalam sebuah model evolusi yang melibatkan jenis allele tak hingga banyaknya (Infinitely many neutral allele models). Akan tetapi berbeda dengan proses yang dibahas sekarang, hasil-hasil yang diperoleh umumnya melibatkan sebuah model reproduksi dimana ada individu yang melahirkan dan mati, dengan mutasi selalu menghasilkan allele yang tidak pernah ada sebelumnya dan setiap allele tidak memiliki perbedaan kemampuan untuk memiliki keturunan, lihat misalnya Ewens (1979). Pembahasan lain yang sejalan dengan masalah yang dihadapi sekarang adalah mengenai banyaknya mutantdalam sebuah populasi yang bermunculan melalui sebuah proses poisson, Kenddal (1994). Sebuah subpopulasi dimulai dengan sebuah mutant yang kemudian berkembang melalui proses kelahiran dan kematian, tiap subpopulasi berkembang secara independent satu sama lain dan memiliki jenis yang berbeda satu sama lain. Karlin (1967) membahas banyaknya mutant allele dalam populasi dengan menerapkan beberapa model input dan growth proses. Kemudian wattterson (1974) menerapkan proses yang sama dalam menjelaskan komposisi genetic dari sebuah sample yang diambil dari sebuah populasi dalam generasi *t*. Masih dalam alur yang sama, Travare (1987) memperluas hasil-hasil sebelumnya dengan menambahkan struktur usia dari mutant yang terbentuk.

2. Model dan Assumsi

Sekarang perhatikan sebuah populasi password pada waktu *t*, sebutlah subpopulasi ke-*i* dengan jumlah netter didalamnya ada sebanyak *k*. Dimisalkan bahwa sampai dengan waktu *t* terdapat *n* netter yang terdiri dari (*m*+1) subpopulasi, *m* subpopulasi yang ada dan satu yang belum terbentuk. Hal ini diperhitungkan mengingat adanya kemungkinan terjadinya mutasi menjadi password baru yang tidak ada sebelumnya. Fluktuasi jumlah password dalam subpopulasi ini terjadi melalui event mati dan mutasi, penurunan terjadi karena mungkin ada netter yang mati atau mutasi (pindah kesubpopulasi lain atau menjadi mutant), sedangkan pertambahan terjadi adanya netter dalam subpopulasi lain pindah kedalam subpopulasi *i*.

Dalam proses dimisalkan infinitesimal probability, atau peluang terjadinya sebuah perubahan jumlah netter dalam subpopulasi ke-*i* dalam selang waktu singkat [*t*,*t*+ *h*) untuk tiap event adalah sebagai berikut:

Bertambah satu,

$$\mu_{(n-k)}\big((\alpha+\gamma)/m\big)h + o(h)$$

Atau

$$\mu_{(n-k)}\theta h + o(h) \text{ dengan } \theta = (\alpha+\gamma)/m$$

Sedangkan penurunan terjadi dengan peluang

$$\mu_k h + o(h)$$

Dan proses dianggap mengikuti pola pertumbuhan linier, yaitu $\mu_i = k\mu$.

Misalkan bahwa X(t) menyatakan banyak netter dalam sebuah subpopulasi pada waktu *t* dan peluang transisi

$$P_k(t) = P(X(t) = kX \mid (0) = 0),$$

Sehingga dari infinitesimal probability diatas dan persamaan forward Chapman-Kolmogorov diperoleh untuk populasi yang terdiri dari subpopulasi lebih dari satu, $m \geq 2$,

$$P_k(t+h) = P_k(t)\{1 - [(k\mu h + o(h) + (n-k)\theta\mu h + o(h)]\} + P_{k+1}(t)\{(k+1)\mu h + o(h)\}$$
$$+ P_{k-1}(t)\{(n-(k-1))\theta\mu h + o(h)\}$$

dan ...1)

$$P_0(t+h) = P_0(t)\{1 - [n\theta\mu h + o(h)]\} + P_1(t)\{\mu h + o(h)\}$$

Sedangkan untuk $m = 1$

$$P_k(t+h) = P_k(t)[1 - (\mu_k h + o(h))] + P_{k+1}(t)[\mu_{k+1}h + o(h)]$$

Untuk $k = 0,1,\ldots,n$-1 dan ...2)

$$P_n(t+h) = P_n(t)[1 - (\mu_n h + o(h))]$$

Perbedaan diantara kedua hasil diatas, persamaan (1) dan (2), disebabkan event yang terjadi dalam hal $m = 1$ hanya penurunan dan tidak ada pertambahan dari luar subpopulasi. Penurunan terjadi melalui event keluar. Jadi dalam hal ini prosesnya merupakan pure death process.

Sedangkan dalam hal ini $m \geq 2$, event yang terjadi tidak hanya keluar tetapi juga ada perpindahan dari subpopulasi lain ke dalam subpopulasi yang diperhatikan. Oleh karenanya solusi untuk masing-masing kasus dibedakan sebagai berikut:

3. Hasil

Kasus m=1

Dalam kasus ini status (state) 0, X(t) = 0, merupakan status penyerap sehingga matriks peluang transisi menjadi reducible dan tidak ada distribusi stasioner untuk X (t). Distribusi transient diperoleh memakai pendekatan probability generating function, p, g, f untuk X(t), $\varphi(s,t) = E(s^{x(t)})$. Ternyata bahwa $\varphi(s,t)$ memenuhi persamaan differensial berikut

$$\frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial d} - \mu s \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial s} \qquad \ldots 3)$$

Kemudian dengan merata-ratakan solusi persamaan differensial terhadap semua n yang mungkin diperoleh hasil berukut:

Hasil 1. Distribusi Peluang Transient X(t)

Distribusi peluang banyak password pada waktu t, X(t),yang terbentuk melalui proses kedatangan poisson dengan rate dan linear growth dengan adalah poisson

$$P_k(t) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda p}, k = 0,1,...$$

Bukti

Dari persamaan differensial parsil (3) diperoleh

$$P(X(t) = k \mid n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dengan $p = e^{-\mu k}$, sehingga dengan merata-ratakan terhadap distribusi poisson untuk n dengan parameter λ

$$P(X(t) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X(t) = k \mid n) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Diperoleh hasil di atas.

Kasus m $\geq$ 2

Dalam kasus m = 1, proses transient karena tidak mungkin sebuah status dapat dicapai kembali. Hal ini disebabkan banyak individu dalam subpopulasi (menjadi populasi dalam kasus m > 1, sekarang proses bersifat recurrent, karena sebuah status dapat dicapai kembali dengan adanya penambahan dari luar subpopulasi dan pengurangan dari dalam dirinya dan tidak ada status penyerap sehingga proses irreducible. Oleh karenanya sekarang proses memiliki distribusi stasioner seperti dicantumkan dalam hasil 2 berikut.

Hasil 2 Distribusi Stasioner X

Distribusi stasioner mengenai peluang banyak password dalam sebuah subpopulasi, dari m subpopulasi yang ada dan dibentuk melalui proses kedatangan poisson dengan rate λ dan subpopulasi berevolusi menurut sebuah linear growth dengan infinitesimal probability seperti diatas maka distribusi statsioner dari banyak password dalam sebuah populasi adalah poisson

$$\pi_k = P(X = k)$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda\theta}{1+\theta}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda\theta}{1+\theta}}$$

Bukti

Persamaan differensial dari persamaan differensi (1) adalah

$$P_k^{'}(t0 = -k\mu P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t) + (n-(k-1))\theta\mu P_{k-1}(t) - (n-k)\theta\mu P_k(t)$$

Dan ...4)

$$P_0^{'}(t) = -n\theta\mu P_0(t) + \mu P_1(t)$$

Dalam limit $t \to \infty$ konstan dan sama dengan π_k sehingga derivatif-derivatifnya menjadi nol dan dari persamaan (4) diperoleh sebuah persamaan rekursif dalam π_k seperti nampak berikut:

Untuk k = 1,2,…,n-1

$$\pi_{k+1} = \pi_k \left[\frac{k+(n-k)\theta}{k+1}\right] - \pi_{k-1}\left[\frac{(n-(k-1)\theta}{k+1}\right]$$

Dan ...5)

$$\pi_1 = \theta\pi_0$$

Dari persamaan (5), untuk k =1,2 dan 3 diperoleh masing-masing π_k sebagai berikut:

$$\pi_1 = \theta\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{n_{[2]}}{2!}\theta^2\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{n_{[3]}}{3!}\theta^3\pi_0$$

Hasil diatas merupakan adanya suatun pola dalam π_k yang secara umum dinyatakan dalam hasil berikut:

Lemma (π_k)

Persamaan rekursif (5) mempunyai solusi

$$\pi_k = \frac{n_{[k]}}{k!}\theta^k\pi_0$$

Dengan ...6)

$$\pi_0 = (1+\theta)^{-n}$$

Dan descending factorial $n_{[k]}$ didefinisikan sebagai

$$n_{[k]} = n(n-1)(n-2)...(n-(k-))$$

Bukti:

Untuk k =1, 2 dan 3 telah diperlihatkan bahwa persamaan (6) berlaku. Selanjutnya pembuktian dikerjakan memakai induksi, untuk ini misalkan bahwa solusi (6) berlaku untuk k = 1 dan akan diperlihatkan bahwa solusi berlaku untuk 1+1 untuk semua 1. Dari (5) diperoleh untuk k =1+1

$$\pi_{|+1} = \pi_{|}\left[\frac{|+(n-1)\theta}{|+1}\right] - \pi_{|-1}\left[\frac{n-(|-1)\theta}{|+1}\right]$$

atau

$$\pi_{|+1} = \pi_{|}\,\frac{|}{|+1} + \frac{n-|}{|+1}\theta\pi_{1} - \frac{(n-(|-1)\theta}{|+1}\pi_{|-1}$$

atau

$$\pi_{|+1} = \frac{|}{|+1}\,\frac{n_{[|]}\theta^{|}}{|+1}\pi_{0} + \frac{n-|}{|+1}\theta\,\frac{n_{[|]}\theta^{|}}{|!}\pi_{0} - \frac{(n-(|-1)\theta}{|+1}\,\frac{n_{[|-1]}\theta^{|-1}}{(|-1)!}\pi_{0}$$

atau

$$\pi_{|+1} = \frac{n_{[|+1]}\theta^{|+1}}{(|+1)!} \text{ sebagaimana seharusnya}$$

kemudian dari

$$\sum_{k=0}^{n}\pi_{k} = 1$$

diperoleh

$$\pi_{0}\sum_{k=0}^{n} = \frac{n_{[k]}\theta^{k}}{k!} = 1 \text{ , sedangkan } \frac{n_{[k]}}{k!} = \binom{n}{k}$$

Sehingga memakai ekspansi binomial diperoleh $\pi_{0}(1+\theta)^{n} = 1$, atau $\pi_{0}(1+\theta)^{-n} = 1$

Memakai lemma 1, pembuktian mengenai distribusi stasioner π_k diperoleh dengan merata-ratakan terhadap distribusi poisson untuk n dan dikerjakan sama seperti untuk Hasil 1.

Hasil 3. Distribusi X (t)

Untuk kasus m≥2, kemajun yang dicapai melalui pendekatan p.g.f.dalam mencari peluang transisi $P_k(t) = P(X(t) = k \mid 0)$ sangat sulit . Dari persamaan (1) diperoleh p.g.f.sebagai berikut:

$$\varphi(s,t) = (1+\theta s)^{n}\left[\frac{e^{-t}(1+\theta)+(1-\theta)+(\theta(1+\theta)e^{-t}-(1-\theta))s}{(1+e^{-t})+(\theta e^{-t}-1)s}\right]^{-n}$$

Untuk memeriksa $\varphi(s,t)$,subtitusikan kedalam $\varphi(s,t)$ nilai s = 1. Untuk p.g.f.ini ternyata $\varphi(1,t) = 1$ sebagaimana seharusnya.

4. Daftar Pustaka

Ewens, W. J. *Sampling Theoriy of Selectively Neutral.* Theor. Pop Biol. 1972

Karlin S., and McGreor J. The Number of Mutant Forms Maintained in a Population. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on mathematical Statistic and Probability.* University of California Presss, pp. 415-438. 1967

Kendal, D. G. Stokhastic Processes and Population Growth. J. Roy. Stat. Soc. B, 11, 1944

Wattersoon G. A. The sampling Theory of Selectively neutral alleles. *Advances Applied Probability,*6,463-468. 1974

Tavare S. The Brith Processs with Immigration and The Genealogical Structure of Large Population, *J. Mathematical Biology,* 25, 161-168.1987