

# Uji Normalitas Bera-Jarque untuk Residu dalam Model Otoregresif Menggunakan Teknik Bootstrap Parametrik

ACENG KOMARUDIN MUTAQIN<sup>1</sup>, LUKMAN NUL HAKIM<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Staf Pengajar di Jurusan Statistika Fakultas MIPA Unisba Bandung

<sup>2</sup>Mahasiswa Jurusan Statistika Fakultas MIPA Unisba Bandung

## ABSTRAK

Makalah ini membahas uji normalitas Bera-Jarque untuk residu dalam model otoregresif menggunakan teknik bootstrap parametrik. Uji ini lebih akurat dibandingkan dengan uji normalitas asimtotik untuk ukuran sampel berhingga ( $n \leq 600$  untuk data bulanan dan  $n \leq 125$  untuk data tahunan). Sebagai contoh aplikasi akan digunakan data debit air sungai Citarum-Nanjung mulai Januari 2000 sampai Desember 2000.

## 1. Pendahuluan

Salah satu metode dalam statistika adalah uji kenormalan atau uji normalitas. Asumsi bahwa populasi berdistribusi normal, telah melancarkan teori dan metode sebegitu rupa sehingga banyak persoalan yang dapat diselesaikan dengan mudah dan cepat. Asumsi normalitas perlu dicek agar langkah-langkah selanjutnya dapat dipertanggungjawabkan. Salah satu penerapan dari uji normalitas adalah untuk menguji kenormalan residu dari model otoregresif.

Uji normalitas residu dari model otoregresif berguna dalam berbagai bidang peramalan dan ekonometrika. Asumsi normalitas digunakan sebagai contoh dalam penaksiran kemungkinan maksimum dan pembentukan interval ramalan (Lütkepohl (1991) dalam Kilian dan Demiroglu (1997)). Salah satu prosedur yang populer untuk menguji normalitas residu dalam model otoregresif adalah uji Bera-Jarque (Lütkepohl (1991) dalam Kilian dan Demiroglu (1997)). Uji ini sifatnya asimtotik dan didasarkan pada koefisien *skewness* dan koefisien *kurtosis* dari residu.

Uji normalitas Bera-Jarque mempunyai kemampuan yang jelek untuk ukuran sampel berhingga ( $n \leq 600$  untuk data bulanan dan  $n \leq 125$  untuk data tahunan). Jeleknnya uji normalitas Bera-Jarque untuk ukuran sampel berhingga, karena berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan oleh Kilian dan Demiroglu (1997) menunjukkan bahwa kuasa ujinya jelek dan persentase penolakan hipotesis nol ketika  $H_0$  benar di bawah taraf signifikansi yang ditetapkan.

Tujuan dari makalah ini adalah membahas uji normalitas Bera-Jarque dari residu model otoregresif untuk ukuran sampel berhingga menggunakan teknik resampling bootstrap parametrik. Prosedur uji normalitas di atas diterapkan untuk data debit air Sungai Citarum-Nanjung mulai dari Januari 2000 sampai dengan Desember 2000.

## 2. Model Otoregresif

Model otoregresif (AR) pertama kali diperkenalkan oleh Yule tahun 1926 dan dikembangkan oleh Walker tahun 1931. Model otoregresif order  $p$ ,  $AR(p)$  dibentuk berdasarkan proses otoregresif order  $p$ , yaitu suatu proses deret waktu dimana nilai dari suatu peubah pada saat  $t$ , tergantung pada nilai peubah tersebut pada saat  $t - 1, t - 2, \dots, t - p$ . Jika peubah tersebut adalah  $Z$ , maka nilai  $z_t$  tergantung pada nilai-nilai  $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}$ .

Misalkan  $Y_t$  adalah peubah yang diukur pada saat  $t$  yang mempunyai ekspektasi  $\mu$  untuk semua  $t$ . Definisikan ukuran yang dipusatkan, yaitu:

$$Z_t = Y_t - \mu \tag{2.1}$$

dimana ekspektasi dari  $Z_t$  adalah nol. Model otoregresif order  $p$ ,  $AR(p)$  didefinisikan sebagai:

$$Z_t = \beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \dots + \beta_p Z_{t-p} + \epsilon_t \tag{2.2}$$

dimana  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  adalah  $p$  buah parameter dari model AR( $p$ ). Salah satu referensi yang memuat tentang model otoregresif adalah Wei (1994).

### 2.1. Model AR(1)

Model otoregresif orde pertama, AR(1), adalah:

$$Z_t = \beta_1 Z_{t-1} + \epsilon_t \tag{2.5}$$

Agar stasioner, maka haruslah  $|\beta_1| < 1$ .

Taksiran parameter dari model AR(1),  $\beta$ , dengan menggunakan metode OLS adalah:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=2}^n Z_t Z_{t-1}}{\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2} \tag{2.9}$$

### 2.2. Model AR(2)

Model otoregresif orde kedua, AR(2), adalah:

$$Z_t = \beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \epsilon_t \tag{2.10}$$

Kondisi stasioner dari model AR(2) di atas terjadi apabila:

$$\begin{cases} \beta_2 + \beta_1 < 1 \\ \beta_2 - \beta_1 < 1 \\ -1 < \beta_2 < 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Taksiran parameter dari model AR(2),  $\beta_1$  dan  $\beta_2$ , dengan menggunakan metode OLS adalah:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n Z_t Z_{t-1} - \sum_{t=3}^n Z_{t-2}^2 - \sum_{t=3}^n Z_t Z_{t-2} \sum_{t=3}^n Z_{t-2} \sum_{t=3}^n Z_{t-1} Z_{t-2}}{\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2 \sum_{t=3}^n Z_{t-2} - \left( \sum_{t=3}^n Z_{t-1} Z_{t-2} \right)^2} \tag{2.19}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=3}^n Z_t Z_{t-2} - \beta_1 \sum_{t=3}^n Z_{t-1} Z_{t-2}}{\sum_{t=3}^n Z_{t-2}^2} \tag{2.20}$$

## 3. Uji Normalitas Bera-Jarque

Uji normalitas Bera-Jarque sangat populer digunakan untuk menguji kenormalan residu dari model-model otoregresif (Lütkepohl (1991) dalam Kilian dan Demiroglu (1997)). Uji ini didasarkan pada koefisien *skewness* dan koefisien kurtosis dari residu model otoregresif. Hipotesis dari uji normalitas di atas adalah:

$H_0$ : Data residu model otoregresif berasal dari suatu populasi yang berdistribusi normal.  
melawan,

## Uji Normalitas Bera-Jarque untuk Residu dalam Model Otoregresif 29 Menggunakan Teknik Bootstrap Parametrik

H<sub>1</sub>: Data residu model otoregresif bukan berasal dari suatu populasi yang berdistribusi normal.

Statistik uji dari uji normalitas Bera-Jarque adalah (Stengos dan Wu, 2004):

$$JB = m \left( \frac{\hat{\mu}_3^2}{6} + \frac{(\hat{\mu}_4 - 3)^2}{24} \right) \quad (2.21)$$

dimana

$$m = n - p$$

$n$  = Banyaknya data asli

$p$  = Banyaknya parameter dalam Model Otoregresif

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{m} \sum_{t=p+1}^n \epsilon_t^3 \quad (2.22)$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{m} \sum_{t=p+1}^n \epsilon_t^4 \quad (2.23)$$

Lütkepohl (1991) dalam Kilian dan Demiroglu (1997) menunjukkan bahwa statistik uji di atas secara asimtotik mendekati distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 2.

#### 4. Uji Normalitas Bera-Jarque untuk Residu dalam Model Otoregresif Menggunakan Simulasi Bootstrap Parametrik

Sebagaimana yang telah diuraikan sebelumnya bahwa distribusi asimtotik dari statistik uji normalitas Bera-Jarque merupakan pendekatan yang jelek untuk kasus sampel berhingga (Kilian dan Demiroglu, 1997). Untuk mengatasi hal itu, akan digunakan nilai kritis bootstrap yang mempunyai performansi yang baik untuk sampel berhingga (Kilian dan Demiroglu, 1997). Nilai kritis bootstrap untuk statistik uji Bera-Jarque dapat diperoleh melalui simulasi dengan memperlakukan nilai-nilai taksiran parameter model otoregresif AR( $p$ ) sebagai nilai-nilai parameter. Di bawah hipotesis nol dari uji Bera-Jarque, residu dari model otoregresif berasal dari populasi yang berdistribusi normal (lihat Efron & Tibshirani (1993) untuk bahasan yang lebih detail mengenai bootstrap). Untuk setiap replikasi bootstrap, sebuah vektor akak berukuran  $m$  dari residu  $\tilde{\epsilon}_t$  diambil secara acak dari distribusi normal,  $\tilde{\epsilon}_t \sim N(0, \hat{\sigma}_\epsilon^2)$ , dimana:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^n (\epsilon_t - \bar{\epsilon})^2}{m - 1} \quad (2.24)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{t=p+1}^n \epsilon_t}{m} \quad (2.25)$$

Kemudian sebuah sampel bootstrap  $\{Z_t^*\}$  yang berukuran  $m$  dihasilkan secara rekursif dari persamaan berikut:

$$Z_t^* = \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i Z_{t-i}^* + \tilde{\epsilon}_t ; \text{ untuk } t = p + 1, p + 2, \dots, n \quad (2.26)$$

Nilai awal  $Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_p^*$  dibangkitkan secara acak melalui pengambilan blok data berukuran  $p$  dari data asli  $\{Z_t; t = 1, 2, \dots, n\}$ . Setelah diperoleh sampel bootstrap, dihitung statistik uji Bera-Jarque. Proses pembangkitan residu  $\tilde{\epsilon}_t$ , sampel bootstrap dan penghitungan

statistik uji Bera-Jarque dilakukan sebanyak  $B$  kali. Berdasarkan distribusi empirik dari statistik uji Bera-Jarque dapat diperoleh nilai kritis bootstrap parametrik. Kilian dan Demiroglu (1997) mengusulkan untuk membangkitkan setidaknya  $B = 1000$  replikasi bootstrap untuk pengujian dengan taraf arti  $\alpha = 10\%$  dan  $B = 2000$  replikasi bootstrap untuk taraf arti  $\alpha = 5\%$ . Jika nilai statistik uji Bera-Jarque untuk residu dari data asli lebih besar dari nilai kritisnya, maka disimpulkan bahwa data residu dari model otoregresif bukan berasal dari suatu populasi yang berdistribusi normal.

### 5. Contoh

Bahan yang digunakan sebagai contoh untuk menerapkan prosedur yang dibahas dalam makalah ini merupakan data sekunder yang diambil dari Pusat Penelitian dan Pengembangan Sumber Daya Air (Pusair) Jl. Ir. H. Djuanda No. 193 Bandung, yaitu mengenai data debit air Sungai Citarum-Nanjung per hari mulai dari Bulan Januari 2000 sampai dengan Desember 2000.

Data debit air tersebut ternyata mengikuti model AR(1), dengan taksiran model otoregresifnya adalah

$$\hat{Z}_t = (0,9096) Z_{t-1}$$

Kesimpulan ini didukung oleh output program SAS 6.12 menunjukkan bahwa nilai minimum BIC untuk berbagai model dimiliki oleh model AR(1) yaitu 1.404469.

Dengan diterapkannya uji normalitas Bera-Jarque untuk residu dari model AR(1) di atas, menunjukkan bahwa nilai statistik uji Bera-Jarque untuk residunya adalah  $JB = 1911675$ . Sedangkan nilai kritisnya yang dihitung dengan menggunakan bootstrap parametrik adalah 91637 (dengan taraf arti  $\alpha = 5\%$ , dan replikasi bootstrap,  $B = 1000$ ). Karena nilai statistik uji  $JB = 1911675 > 91637$  maka hipotesis nol ditolak dan disimpulkan bahwa data residu model otoregresif, AR(1) untuk data debit air sungai Citarum-Nanjung bukan berasal dari populasi yang berdistribusi normal.

### 6. Kesimpulan

Uji normalitas Bera-Jarque untuk residu dalam model otoregresif menggunakan teknik bootstrap parametrik merupakan alternatif untuk menguji kenormalan residu dari suatu data untuk sampel berhingga ( $n \leq 600$  untuk data bulanan dan  $n \leq 125$  untuk data tahunan).

Berdasarkan hasil yang diperoleh untuk data debit air sungai Citarum-Nanjung yang diperoleh dari Pusair Jl. Ir. H. Djuanda No 193 Bandung, diperoleh kesimpulan bahwa data residu untuk model otoregresif, AR(1) dari data debit air sungai Citarum-Nanjung bukan berasal dari populasi yang berdistribusi normal.

### 7. Daftar Pustaka

- Efron, B. dan Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction To The Bootstrap*. Chapman dan Hall, Dept. BC, One Penn Plaza. New York.
- Kilian, L. dan Demiroglu, U. (1997). *Residual-Based Bootstrap Test For Normality in Autoregressions*.
- Stengos, T. dan Wu, X. (2004). *Information-Theoretic Distribution Test With Application To Symmetry and Normality*.
- Wei, W. W. S. (1994). *Time Series Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Canada.