Statistika, Vol. 6 No. 2, 47 – 53
Nopember 2006

Pengujian Hipotesis untuk Kombinasi Ketidak-Bebasan
(*test of signifikans for combining non-independent*)

MULYANA

Jurusan Statistika FMIPA Unpad

1. Pendahuluan

Perhatikan sampel bivariat

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \; ; \text{i} = 1, 2, \ldots \text{n} ,$$

dari populasi bivariat yang berdistribusi normal bivariat dengan parameter vektor rata-rata hitung dan matriks varkovnya masing-masing

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} , \; V = \begin{pmatrix} (c\mu_1)^2 & c^2 \rho\mu_1\mu_2 \\ c^2 \rho\mu_1\mu_2 & (c\mu_2)^2 \end{pmatrix}, \text{ c : koefisien variasi}$$

Fungsi kemungkinan berdasarkan sampel bivariat tersebut adalah

$$f(\underline{u}_i, \underline{\mu}, V) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\underline{u}_i - \underline{\mu}\right)' V^{-1} \left(\underline{u}_i - \underline{\mu}\right)}$$

dan jika dilogaritma-naturalkan maka akan diperoleh persamaan

$$L = \ln f(\underline{u}_i, \underline{\mu}, V) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |V|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\underline{u}_i - \underline{\mu}\right)' V^{-1} \left(\underline{u}_i - \underline{\mu}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} n \ln 2\pi - \frac{1}{2} n \ln|V| - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\underline{u}_i - \underline{\mu}\right)' V^{-1} \left(\underline{u}_i - \underline{\mu}\right)$$

Jika L didiferensial-parsialkan terhadap μ_1, μ_2, dan ρ, yang selanjutnya masing-masing disamakan dengan 0, maka akan diperoleh sistem persamaan non-linier

(1.1) $$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\mu_1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1 x_i)}{c^2 \mu_1^3 \left(1 - \rho^2\right)} - \frac{\rho \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \mu_2 x_i)}{c^2 \mu_1^2 \mu_2 \left(1 - \rho^2\right)} = 0$$

(1.2) $$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\mu_2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_2 y_i)}{c^2 \mu_2^3 \left(1 - \rho^2\right)} - \frac{\rho \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \mu_1 y_i)}{c^2 \mu_1 \mu_2^2 \left(1 - \rho^2\right)} = 0$$

(1.3) $$\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{n\rho}{1 - \rho^2} - \frac{\rho}{\left(1 - \rho^2\right)^2} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2}{c^2 \mu_1^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_2)^2}{c^2 \mu_2^2} \right\}^2 + \frac{1 + \rho^2}{\left(1 - \rho^2\right)^2} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2}{c^2 \mu_1 \mu_2} \right\} = 0$$

Salah satu metode untuk mendapatkan jawab persamaannya adalah *rekursive* linier, berdasarkan konsepsi jika $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\rho}$, masing-masing penaksir untuk μ_1, μ_2, ρ, maka persamaan *rekursive*nya adalah

$$\hat{\mu}_{1j} = \hat{\mu}_{1j-1} + \left\{ \frac{k}{n} \left(k_1 \frac{\partial L}{\partial \mu_1} + k_2 \frac{\partial L}{\partial \mu_2} + k_3 \frac{\partial L}{\partial \rho} \right) \right\} \tag{2.1}$$

$$\hat{\mu}_{2j} = \hat{\mu}_{2j-1} + \left\{ \frac{k}{n} \left(k_2 \frac{\partial L}{\partial \mu_1} + k_4 \frac{\partial L}{\partial \mu_2} + k_5 \frac{\partial L}{\partial \rho} \right) \right\} \tag{2.2}$$

$$\hat{\rho}_{j} = \hat{\rho}_{j-1} + \left\{ \frac{k}{n} \left(k_3 \frac{\partial L}{\partial \mu_1} + k_5 \frac{\partial L}{\partial \mu_2} + k_6 \frac{\partial L}{\partial \rho} \right) \right\} \tag{2.3}$$

dengan j menyatakan indek *rekursive*, dan

$$k = -c^2 (1+\rho)\left(\rho^2 + 2c^2\rho + 2c^2 + 1\right)^{-1}$$

$$k_1 = -\mu_1^2\left(2c^2+\rho^2+1\right)\left(\rho+2c^2+1\right)^{-1}$$

$$k_2 = -\mu_1\mu_2\rho\left(\rho^2+2\rho c^2+1\right)\left(\rho+2c^2+1\right)^{-1}$$

$$k_3 = -\mu_1\rho(1-\rho)$$

$$k_4 = -\mu_2^2\left(2c^2+\rho^2+1\right)^{-1}$$

$$k_5 = -\mu_2\rho\left(1-\rho^2\right)$$

$$k_4 = -\mu_2^2\left(2c^2+\rho^2+1\right)^{-1}$$

Untuk mendapatkan penaksir yang *relative* efisien, jawab awal untuk persamaan *rekursive* adalah

$$\hat{\mu}_{10} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.1}$$

$$\hat{\mu}_{20} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{3.2}$$

$$\hat{\rho}_0 = r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}} \tag{3.3}$$

Jika $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\rho}$ telah diperoleh dengan metode *rekursive* linier tersebut, maka proses selanjutnya adalah menguji signifikansi dari penaksir-penaksir tersebut berdasarkan rumusan hipotesis,

1. H_{01} : $\rho = 0$ vs H_{11} : $\rho > 0$ atau $\rho < 0$ atau $\rho \neq 0$ (dipilih salah satu yang sesuai dengan persoalannya)

Statistik ujinya adalah

$$t = \frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{1-\hat{\rho}^2}$$

yang berdistribusi $t_{(n-2)}$

2.H_{02} : $\mu_1 = \mu_2$ vs H_{02} : $\mu_1 > \mu_2$ atau $\mu_1 < \mu_2$ atau $\mu_1 \neq \mu_2$ (dipilih salah satu yang sesuai dengan persoalannya)

Statistik ujinya adalah

$$t = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{s\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

yang berdistribusi $t_{(n-2)}$, sedangkan s simpangan baku gabungan yang dihitung berdasarkan rumus

$$s = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}c(n-1)\left(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2\right)}$$

dengan c koefisien variasi gabungan.

Jika H_{01} ditolak, yang berarti ada korelasi antara variabel (kelompok) X dengan Y, maka harus dilakukan pengujian keberartian dari korelasinya tersebut dengan menggunakan statistik uji

(4) $X^2 = -2 \ln p_1 - 2 \ln p_2$

yang berdistribusi χ_2, dengan p_1 dan p_2 peluang nilai-nilai X dan Y lebih besar dari nilai-nilai pengamatan di bawah H_{02}. Pada prakteknya, nilai-nilai p_1 dan p_2 dihitung berdasarkan distribusi t_n untuk taraf signifikans tertentu.

Teori ini digunakan untuk menelaah pengaruh dari sebuah perlakuan, berdasarkan nilai koefisien korelasi dan rata-rata hitung antara kelompok eksperimen (kelompok yang diberi perlakuan) dengan kelompok kontrolnya (kelompok yang tidak diberi perlakuan), dan untuk menelaah karakter hubungan antara dua kelompok yang diindikasikan memiliki hubungan. Kesimpulan hasil analisis yang dikemukakan,

1.Jika dari hasil pengujian diperoleh H_{01} ditolak, maka disimpulkan perlakuan memberikan pengaruh pada unit eksperimen, atau kedua kelompok memiliki hubungan. Untuk menelaah apakah pengaruh atau hubungan tersebut signifikans atau tidak, gunakan statistik uji (4). Jika $\hat{\rho} > X^2$ maka pengaruh atau hubungan signifikans, dalam hal lain tidak signifikans.

2.Jika dari hasil pengujian diperoleh H_{02} ditolak, maka disimpulkan perlakuan menyebabkan perubahan rata-rata hitung, atau kedua kelompok memiliki rata-rata hitung tidak sama.

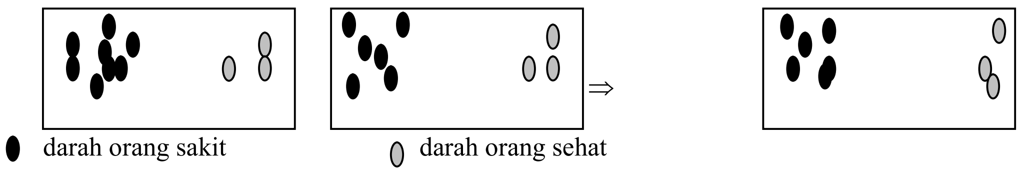
Sehingga jika dari hasil pengujian hipotesis diperoleh kesimpulan H_{01}, H_{02} ditolak dan $\hat{\rho} > X^2$, maka disimpulkan perlakuan memberikan pengaruh yang signifikans, dan membuat perubahan pada rata-rata hitungnya (membesar atau mengecil), atau hubungan kedua kelompok signifikans dan rata-rata hitungnya berbeda (lebih besar atau lebih kecil).

Yang menjadi persoalan dalam teori ini adalah membangun program komputasi untuk persamaan (2.1), (2.1), dan (2.3), sebab diperlukan pemahaman teori tentang Analisis Numerik dan Pemograman Komputer. Sehingga untuk peneliti yang akan menggunakan teori ini dan tidak memahami teori Analisis Numerik dan Pemograman Komputer, supaya bekerja-sama dengan orang dari bidang ilmu komputer atau teknik informatika, untuk persoalan perhitungannya. Berikut ini beberapa contoh penggunaan dari teori yang telah dikemukakan tersebut.

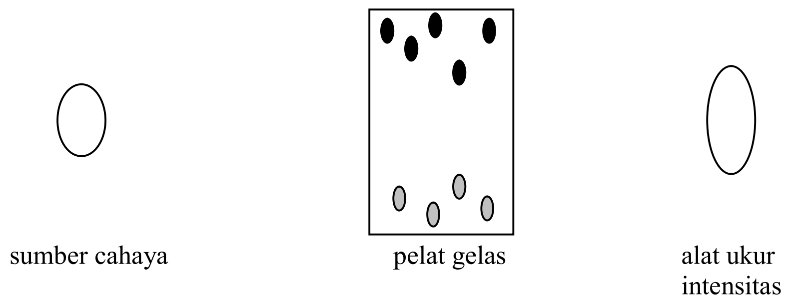
2. Telaah Korelasi Konsentrasi Darah Orang Sakit dengan Intensitas Cahaya yang Diserapnya

Dalam teori kimia klinis, jika seseorang sakit, maka akan terjadi perubahan konsentrasi pada darahnya akibat berubahnya struktur kimiawi darah. Sehingga dengan menggunakan darah orang sehat sebagai kontrol dan pengendali mutu, dapat dilakukan telaah tidak langsung mengenai konsentrasi darah orang sakit berdasarkan intensitas cahaya yang diserap darahnya. Hal ini sesuai dengan teori dalam kimia fisik, bahwa intensitas cahaya yang diserap zat cair berbanding lurus dengan konsentrasinya, sehingga koefisien variasi dari konsentrasi zat cair akan sama dengan intensitas cahaya yang diserapnya. Selanjutnya berdasarkan teori kimia klinis, konsentrasi darah orang sehat akan selalu lebih kecil dari konsentrasi darah orang sakit.

Telaahan mengenai teori tersebut dapat dilakukan dengan teori statistika seperti yang telah dikemukakan. Prosesnya sebagai berikut, sediakan kira-kira 30 buah pelat gelas (*objec glass* dan *cover glass*), yang telah ditetesi 5 – 10 tetes darah orang sehat dan 10 – 20 tetes darah orang sakit.



Buat alat ukur yang dibangun atas sumber cahaya, pelat gelas tetesan darah, dan alat ukur internsitas cahaya dengan posisi segaris



Gunakan kira-kira 10 buah sumber cahaya yang berbeda intensitasnya, dan sinari setiap tetes darah tersebut, kemudian ukur intensitas cahaya yang keluar.

Buat tabel pengamatan seperti di bawah ini

Pelat Gelas Ke	**Jenis Darah**	**Tetesan Ke**	**Intensitas Cahaya**		
			Masuk	**Keluar**	**Diserap**

Jika u_{ij} dan w_{ij} masing-masing menyajikan intansitas cahaya yang diserap oleh darah orang sehat dan orang sakit, pada pelat gelas ke-i tetesan darah ke-j, maka lakukan perhitungan :

1. Nilai rata-rata hitung untuk setiap kelompok tetesan darah pada setiap pelat gelas, sehingga diperoleh nilai-nilai $\bar{u}_i$ dan $\bar{y}_i$ yang menyatakan rata-rata hitung intensitas cahaya yang diserap darah orang sehat dan orang sakit pada pelat gelas ke-i,

$$\bar{u}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} u_{ij} \quad , \quad \bar{w}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}$$

2. Hitung koefisien variasi untuk setiap kelompok tetesan darah orang sehat pada setiap pelat gelas :

$$c_i = \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(u_{ij} - \bar{u}_i\right)}}$$

Jika proses pengamatan dilakukan dengan baik dan benar, maka nilai-nilai c_i tidak akan jauh berbeda, sehingga nilai koefisien variasi yang digunakan untuk perhitungan selanjutnya, adalah nilai rata-rata hitungnya.

3. Hitung nilai-nilai seperti pada Persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3), dengan nilai-nilai x_i, y_i, $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, masing-masing adalah $\bar{u}_i$, $\bar{w}_i$, $\bar{\bar{u}}$, $\bar{\bar{w}}$

$$\bar{\bar{u}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{u}_i \quad , \quad \bar{\bar{w}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{w}_i$$, k : banyaknya pelat gelas

4. Membuat program iterasi untuk menyelesaikan persamaan *rekursive* linier seperti pada Persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3), dengan jawab awalnya hasil perhitungan pada tahap ke-3. Proses iterasi dihentikan jika nilai pada langkah ke-k tidak berbeda besar dengan pada langkah ke-(k+1).

5. Setelah diperoleh nilai-nilai penaksir untuk μ_1, μ_2, dan ρ, lakukan pengujian dengan perumusan : $H_{01} : \rho = 0$ vs $H_{11} : \rho \neq 0$ dan $H_{02} : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_{02} : \mu_1 < \mu_2$

Metode ini merupakan metode alternatif, jika metode yang biasa dilakukan untuk menelaah konsentrasi darah orang sakit tidak bisa dilakukan. Untuk melakukan percobaannya diperlukan darah orang sehat dan orang sakit yang "cukup banyak", alat ukur untuk intensitas cahaya yang diserap darah, perangkat komputer dengan program iterasi untuk persamaan (2.1), (2.2), (2.3).

Untuk keperluan praktis dan pengembangannya, jenis penyakit dari kelompok darah orang sakit (kelompok eksperimen) harus sudah diketahui, dan pengamatan dilakukan untuk beberapa jenis penyakit, sehingga diperoleh sebuah "bank data" mengenai konsentrasi darah orang sakit, dan "bank data" ini digunakan sebagai kelompok pembanding untuk analisis konsentrasi darah orang sakit selanjutnya, sehingga kelompok darah orang sehat (kelompok kontrol) tidak diperlukan lagi. Untuk menelaah kuantitas konsentrasi darah orang sakit dapat digunakan analisis regresi sederhana dengan kelompok eksperimen sebagai variabel respon (variabel tidak bebas) dan kelompok kontrol sebagai variabel bebas, asalkan faktor pembanding dengan konsentrasi darah orang sehat diketahui, dan jika tidak diketahui dapat digunakan koefisien variasi c seperti yang tersurat pada teori yang telah dikemukakan.

3. Telaah Pengaruh Bantuan pada Masyarakat Miskin

Pemerintah telah banyak melakukan program bantuan kepada masyarakat miskin dalam upaya memberdayakan dari segi perekonomian rumah-tangganya. Dengan teori yang telah dikemukan tersebut dapat ditelaah efektifitas bantuan, berdasarkan perbandingan rata-rata pendapatan rumah tangga, dan dalam telaahan ini kelompok kontrol adalah rumah tangga miskin yang tidak mendapatkan bantuan, dan kelompok eksperimen adalah yang mendapatkan bantuan.

Deskripsi kemiskinan diukur berdasarkan 16 variabel keluarga miskin yang telah dirumuskan oleh Biro Pusat Statistik, yaitu

1. Luas lantai bangunan tempat tinggal kurang dari 10 m^2.
2. Lantai bangunan tempat tinggal dari tanah/bambu/kayu.
3. Dinding bangunan dari bambu/rumbia/kayu berkualitas rendah.
4. Buang air besar di tempat umum.

5. Sumber air minum tak terlindung/sungai/air hujan.
6. Sumber penerangan bukan listrik.
7. Jenis bahan bakar untuk memasak dari kayu/arang.
8. Tidak pernah membeli daging/ayam/susu dalam seminggu.
9. Makan anggota rumah tangga satu kali dalam sehari.
10. Tidak pernah membeli pakaian baru dalam setahun.
11. Tidak pernah berobat ke puskesmas/poliklinik jika sakit.
12. Tidak memiliki pekerjaan utama/tetap.
13. Pendidikan tertinggi kepala keluarga SD/MI ke bawah.
14. Tidak memiliki barang senilai Rp. 500.000,-.
15. Tidak pernah menerima kredit usaha kecil-menengah (KUKM) setahun yang lalu.
16. Klasifikasi keluarga miskin: **sangat miskin**, jika kemampuan minimum mengkonsumsi pangan (KMKP) paling tinggi 1.900 Kalori/orang/bulan dan pengeluaran non makanan (PNM) Rp. 120.00/orang/ bulan, **miskin**, jika KMKP 1.901 – 2.100 Kalori/orang/bulan dan PNM Rp 150.000,-/orang/bulan, **hampir miskin** jika KMKP 2.1001 – 2.300 Kalori/orang/bulan dan PNM Rp. 175.000,-/ orang/bulan.

Proses penelitian bisa dilakukan dengan pengamatan langsung di lapangan (data primer), atau berdasarkan data sekunder yang tersedia di kantor BPS dan dinas-dinas terkait dengan program pengentasan kemiskinan di tingkat provinsi/kota/kabupaten. Pengamatan harus dilakukan dengan memperhatikan klasifikasi keluarga miskin (sangat miskin , miskin , hampir miskin), kriteria wilayah tempat tinggal keluarga miskin (perkotaan , perdesaan , perbatasan), sehingga tabel pengamatan yang harus dibuat sebagai berikut,

Objek Ke	*Klasifikasi Kemiskinan*	*Kriteria Wilayah*	*Anggota Keluarga*	*Rata-rata Pendapat Keluarga Per Bulan Yang*	
				Mendapat Mantuan	**Tidak Mendapat Bantuan**

Jika x_{ijkl} , menyatakan rata-rata pendapat keluarga miskin, dengan

i = 0 (yang tidak mendapat bantuan) , 1 (yang mendapat bantuan)

j = 0 (sangat miskin) , 1 (miskin) , 2 (hampir miskin)

k = 0 (perdesaaan) , 1 (perbatasan) , 2 (perkotaan)

l = 1, 2, . . . n_{ijk}

maka proses perhitungan yang harus dilakukan,

1.Hitunglah $\bar{x}_{0jk} = \sum_{l=1}^{n_{0jk}} x_{jkl}$ dan $\bar{x}_{1jk} = \sum_{l=1}^{n_{1jk}} x_{jkl}$; j , k = 0, 1, 2.

Nilai-nilai $\bar{x}_{0jk}$ dan $\bar{x}_{1jk}$ masing-masing menyajikan nilai-nilai x_i dan y_i pada teori yang telah dikemukakan.

2.Hitung koefisien variasi untuk masing-masing kelompok keluarga miskin yang mendapat bantuan dan yang tidak mendapatkan. Hal ini untuk menelaah apakah perbedaannya cukup kecil ? Sebab jika besar maka kriteria wilayah harus dipartisi berdasarkan struktur kepadatan (perkotaan dan perbatasan) atau struktur geografi (perdesaan).

3.Lakukan proses *rekursive* linier seperti yang disajikan pada teori untuk menghitung nilai-nilai taksiran koefisien korelasi dan rata-rata hitung masing-masing kelompok.

4.Jika ρ parameter koefisien korelasi antara rata-rata pendapatan, dan μ_0, μ_1, masing-masing parameter rata-rata hitung dari rata-rata pendapatan keluarga miskin yang tidak mendapat bantuan dan yang mendapatkan bantuan, maka lakukan pengujianhipotesis $H_{01} : \rho = 0$ vs. $H_{11} : \rho \neq 0$, dan $H_{02} : \mu_0 = \mu_1$ vs. $H_{12} : \mu_0 < \mu_1$.

5. Lakukan analisis hasil perhitungan.

4. Daftar Pustaka

1. Brown, M. B. ; 1975 ; A Method for Combining Non-Independent : One-Sided Test of Signifikans ; Technometrics, December 1975.
2. de Jonge, H. (editor) ; 1961 ; Quantitative Methods in Pharmacology ; Proceding of A Symposium Held in Leiden on May 10 – 13, 1960 ; North-Holland Pub. Co., Amsterdam.
3. Graybill, F. A. ; 1976 ; Theory and Application of Linear Model ; Duxbury Press, California.
4. Schloerb, P. R. dkk. ; 1951 ; The Journal of Laboratory and Clinical Medicine, No. 4, 653 – 662.