Statistika, Vol. 7 No. 1, 1 – 6
Mei 2007

Metode Bootstrap Persentil Pada Sensor Tipe II Berdistribusi Eksponensial

AKHMAD FAUZY
Jurusan Statistika FMIPA Universitas Islam Indonesia Yogyakarta

ABSTRAK

Metode bootstrap adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat berpotensi pada masalah ketakstabilan dan keakurasian, khususnya dalam menentukan selang kepercayaan. Selang yang sering dicari pada sensor tipe II berdistribusi eksponensial adalah selang bagi parameter, fungsi tahan hidup dan kuantil tahan hidup. Rumus yang digunakan memerlukan distribusi $\chi 2$ dan F. Dengan metode bootstrap persentil akan lebih baik, kerana selang yang dihasilkan lebih pendek dan tidak memerlukan bantuan distribusi.

1. Latar Belakang

Analisis uji hidup (*survival analysis*) adalah suatu penyelidikan tentang tahap hidup dari suatu unit atau komponen hasil industri. Salah satu unit atau komponen di dalam industri adalah mesin. Pihak manajemen sebuah industri biasanya ingin melakukan suatu penyelidikan untuk mengetahui seberapa besar peluang mesin dapat bertahan hidup sampai masa tertentu. Dalam ilmu statistik, khususnya bidang analisis uji hidup, peluang suatu individu (mesin) akan bertahan hidup sampai waktu tertentu disebut dengan fungsi *survivor* (Cox and Oakes, 1984).

Penyensoran adalah sesuatu hal yang penting di dalam analisis uji hidup. Beberapa tipe penyensoran yang biasanya sering dipakai antara lain sensor lengkap, sensor tipe I dan tipe II. Dalam sensor lengkap atau uji sampel lengkap ini eksperimen akan dihentikan apabila semua komponen yang diuji telah mengalami kematian semua atau gagal. Untuk sensor tipe I, eksperimen akan dihentikan apabila telah mencapai waktu penyensoran tertentu. Sedangkan suatu sampel dikatakan tersensor tipe II apabila eksperimen akan dihentikan setelah kerusakan atau kegagalan ke-r telah diperoleh (Lawless, 2003).

Salah satu distribusi yang penting di dalam analisis uji hidup adalah distribusi eksponensial dengan satu dan dua parameter. Lawless (1982), Bain dan Engelhardt (1992) serta Bury (1999) telah menguraikan suatu metode untuk mencari selang kepercayaan fungsi mandirian bagi satu dan dua parameter distribusi eksponensial pada data tertapis tipe II. Perhitungan selang tersebut memerlukan bantuan distribusi khi kuasa dua.

Metode bootstrap adalah suatu metode berkomputeran yang sangat berpotensi untuk dipergunakan pada masalah ketakstabilan dan kejituan, khususnya dalam menentukan selang kepercayaan. Tujuan dari penggunaan metode bootstrap adalah untuk mendapatkan pendugaan yang sebaik-baiknya yang berasal dari data yang minimal (Efron dan Tibshirani, 1993).

Fauzy dan Ibrahim (2002a dan 2002b) telah mencari anggaran selang bagi satu dan dua parameter distribusi eksponensial di bawah sensorlengkap dengan metode bootstrap persentil. Dalam kajian kali ini perlu dicoba untuk menghitung anggaran selang bagi satu dan dua perameter distribusi eksponensial di bawah sensortipe II dengan metode bootstrap persentil.

Objektif

Tujuan dari penyelidikan ini adalah untuk menunjukkan bahawa selang kepercayaan bagi satu dan dua parameter distribusi eksponensial di bawah sensortipe II yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil akan lebih baik apabila dibandingkan dengan menggunakan metode yang sering digunakan dalam analisis mandirian (metode tradisional).

Metode

Data yang digunakan pada penyelidikan ini adalah data yang diambil dari buku *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, karangan Lawless tahun 1982 halaman 103 untuk satu parameter dan halaman 130 untuk dua parameter. Langkah yang pertama adalah menghitung selang bagi satu dan dua parameter distribusi eksponensial di bawah sensortipe II dengan metode tradisional. Langkah selanjutnya adalah mencari nilai ulangan bootstrap sehingga mencapai titik penumpuan. Setelah diketahui titik penumpuannya, maka selang dengan metode bootstrap persentil dapat dicari. Kemudian hasil selang antara metode tradisional dengan metode bootstrap persentil dibandingkan.

2. Landasan Teori

Untuk memperoleh informasi mengenai masa hayat suatu produk industri, maka biasanya industri tersebut melakukan analisis mandirian. Analisis mandirian biasanya dilakukan oleh divisi riset dan pengembangan dari industri tersebut. Pengujian tersebut dapat berupa pengoperasian dalam laboratorium (uji kaji), diobservasi sampai barang-barang tersebut gagal atau tidak berfungsi lagi. Dalam hal ini biasanya analisis mandirian akan menunjukkan arti sebagai masa kegagalan (*failure times*). Yang membezakan analisis mandirian dengan bidang-bidang statistik lainnya adalah adanya penapisan. Beberapa tipe sensorantara lain sensorlengkap, sensortipe I dan tipe II. Suatu sampel dikatakan tertapis tipe II apabila penyelidikan akan dihentikan setelah kerusakan atau kegagalan ke-r telah diperoleh (Lawless, 1982).

Bentuk dari samper tertapis tipe II ialah

$$t_{1:n} \le t_{2:n} \le \ldots \le t_{n\text{-}s:n} \tag{1}$$

di mana $t_{i:n}$ adalah statistik tertib ke-i dari sampel berukuran n.

Distribusi Eksponensial Satu Parameter

Fungsi ketumpatan bagi distribusi eskponen diberi oleh (Bury, 1999):

$$f(t;\theta) = \frac{1}{\theta}\ \text{eksp}\left(-\frac{t}{\theta}\right) \quad ; \quad t \ge 0, \theta > 0 \tag{2}$$

di mana θ ialah masa hayat jangkaan. Anggaran kebolehjadian maksimum daripada θ iaitu (Lawless, 1982 dan Bury, 1999)

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} t_{i:n} + s\, t_{n\text{-}s:n}}{n-s} = \frac{T}{n\text{ - }s} \tag{3}$$

di mana T ialah total dari masa hayat. Bain dan Engelhardt (1992) telah menguraikan suatu rumus untuk mencari selang kepercayaan (1-α) bagi θ iaitu

$$\frac{2T}{\chi^2_{(2(n\text{-}s);1-\alpha/2)}} \le \theta \le \frac{2T}{\chi^2_{(2(n\text{-}s);\alpha/2)}} \tag{4}$$

Distribusi Eksponensial Dua Parameter

Fungsi ketumpatan bagi distribusi eskponen diberi oleh (Lawless, 1982):

$$f(t;\mu,\theta) = \frac{1}{\theta}\ \text{eksp}\left(-\frac{(t-\mu)}{\theta}\right) \quad ; \quad t \ge \mu, \theta > 0 \tag{5}$$

di mana θ ialah hayat min reja dan μ masa jaminan. Anggaran kebolehjadian maksimum daripada θ dan μ iaitu (Lawless, 1982 dan Bury, 1999)

$$\hat{\mu} = t_{1:n} \ \text{ dan } \ \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} t_{i:n} + s\, t_{n-s:n} - n\, t_{1:n}}{n-s} \tag{6}$$

Bain dan Engelhardt (1992), Lawless (1982) dan Bury (1999) telah menguraikan suatu rumus untuk mencari selang kepercayaan (1-α) bagi θ dan μ iaitu

$$t_{1:n} - \frac{(n-s)\,\hat{\theta}\,F_{(2,2(n\text{-}s)\text{-}2;1\text{-}\alpha/2)}}{n\,(n - s - 1)} \le \mu \le t_{1:n} - \frac{(n-s)\,\hat{\theta}\,F_{(2,2(n\text{-}s)\text{-}2;\alpha/2)}}{n\,(n - s - 1)} \tag{7}$$

$$\frac{2\,(n - s)\,\hat{\theta}}{\chi^2_{(2(n\text{-}s)\text{-}2;1\text{-}\alpha/2)}} \le \theta \le \frac{2\,(n - s)\,\hat{\theta}}{\chi^2_{(2(n\text{-}s)\text{-}2;\alpha/2)}} \tag{8}$$

Metode Bootstrap Persentil

Metode bootstrap adalah suatu metode berkomputeran yang sangat berpotensi untuk dipergunakan pada masalah ketakstabilan dan kejituan, khususnya dalam menentukan selang kepercayaan. Istilah bootstrap berasal dari "*pull oneself up by one's bootstrap*" (Efron dan Tibshirani, 1993) yang bermaksud berpijak di atas kaki sendiri, berusaha dengan sumber daya minimal.

Dalam sudut pandang statistik, sumber daya yang minimal adalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari anggapan tertentu, atau data yang tidak mempunyai anggapan apapun tentang distribusi populasinya. Tujuan dari penggunaan metode bootstrap adalah untuk mendapatkan anggaran yang sebaik-baiknya yang berasal dari data yang minimal. Dengan demikian penggunaan komputer dalam metode bootstrap sangat diperlukan

Secara umum tatacara bootstrap persentil untuk penganggaran selang bagi satu dan dua parameter distribusi eksponensial di bawah sensortipe II iaitu

1. Berikan kebarangkalian yang sama $1/(n\text{-}s)$ pada setiap data tertapis tipe II,
2. Mengambil suatu sampel berulang secara rawak berukuran (n-s) dengan penggantian,
3. Ulangi langkah 2 sebanyak B kali untuk mendapatkan "*independent Bootstrap replications*" $\hat{\beta}_n^{*1}, \hat{\beta}_n^{*2}, \; \ldots, \hat{\beta}_n^{*B}$ dan mencari pada ulangan keberapa tercapai titik penumpuan. Langkah selanjutnya adalah mencari θ_n^{*i} dan μ_n^{*i}:

   Satu parameter

$$\hat{\theta}^{*b} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} t_{i:n}^{*b} + s\, t_{n-s:n}^{*b}}{n - s} \tag{9}$$

   Dua parameter

$$\mu^{*b} = t_{1:n}^{*b} \quad \text{dan} \quad \hat{\theta}^{*b} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} t_{i:n}^{*b} + s\, t_{n-s:n}^{*b} - n\, t_{1:n}^{*b}}{n - s} \tag{10}$$

4. Selang kepercayaan *Bootstrap* persentil pada tingkat kepercayaan 1 - α bagi θ dan μ didefinisikan dengan persentil ke-100(α/2) dan ke-100(1-α/2) pada θ_n^{*i} dan μ_n^{*i},

$$\left[\hat{\theta}^{*b\,(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{*b\,(1-\alpha/2)}\right] \text{ dan } \left[\hat{\mu}^{*b\,(\alpha/2)}, \hat{\mu}^{*b\,(1-\alpha/2)}\right] \tag{11}$$

3. Hasil dan Pembahasan

Data yang digunakan pada penyelidikan ini adalah data yang diambil dari buku *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, karangan Lawless tahun 1982 halaman 103 untuk satu parameter

31, 58, 157, 185, 300, 470, 497, 673,

halaman 130 untuk dua parameter

162, 200, 271, 320, 393, 508, 539, 629, 706, 777,
884, 1008, 1101, 1182, 1463, 1603, 1984, 2355, 2880

Satu parameter

Dengan menggunakan (3) dan (9) maka estimasi titik bagi θ = 632.875 dan θ = 598.9774. Batas bawah, batas atas dan lebar selang pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % bagi θ dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi θ pada tingkat kepercayaan (AK) 99 % dan 95 %

AK	metode tradisional			metode bootstrap		
	BB	BA	LS	BB	BA	LS
99 %	295.501	1969.194	1673.693	274.125	839.375	565.250
95 %	351.045	1465.908	1114.863	387.375	792.000	404.625

Dua parameter

Dengan menggunakan (6) dan (10) maka estimasi titik bagi μ = 162.000 dan μ = 187.725 dan θ = 836.158 dan θ = 813.1663. Batas bawah, batas atas dan lebar selang pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % bagi μ dan θ dapat dilihat pada tabel 2 dengan metode tradisional dan tabel 3 dengan metode bootstrap.

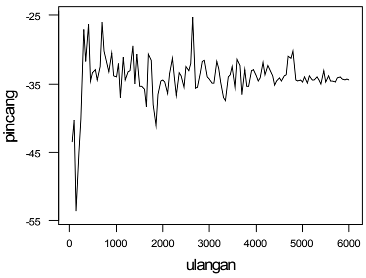
Tabel 2. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi θ bagi μ dan θ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	μ			θ		
	BB	BA	LS	BB	BA	LS
99 %	(-168.241)	161.884	330.125	493.310	1902.626	1409.316
95 %	(-68.477)	161.415	229.892	551.326	1612.341	1061.015

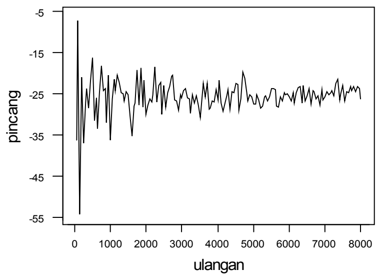
Tabel 3. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi θ bagi μ dan θ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	μ			θ		
	BB	BA	LS	BB	BA	LS
99 %	162.000	393.000	231.000	405.789	1307.263	901.474
95 %	162.000	320.000	158.000	479.211	1216.737	737.526

Untuk mencari pada ulangan keberapa akan tercapai titik konvergen, maka dibuat plot antara bias dengan ulangan. Plot tersebut dapat dilihat pada gambar 1 bagi satu parameter dan gambar 2 bagi dua parameter.



Gambar 1



Gambar 2

Perbandingan Lebar Selang

Perbandingan lebar selang kepercayaan bagi satu dua parameter distribusi eksponensial di bawah sensor tipe II yang dihasilkan oleh metode tradisional dan metode bootstrap persentil dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4. Perbandingan lebar selang bagi satu dan dua parameter pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

Metode	Satu parameter (θ)		Dua parameter (μ)		Dua parameter (θ)	
TK	99 %	95 %	99 %	95 %	99 %	95 %
Tradisional	1673.693	1114.863	330.125	229.892	1409.316	1061.015
Bootstrap persentil	565.250	404.625	231.000	158.000	901.474	737.526
Selisih selang	1108.443	710.238	99.125	71.892	507.842	323.489

Selang yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil lebih pendek daripada yang dihasilkan oleh metode tradisional. Hal ini bisa dilihat pada tabel 4, dimana terjadi selisih lebar selang yang cukup besar antara kedua metode tersebut. Dengan demikian dapat disimpulkan bahawa metode bootstrap persentil jauh lebih baik dari pada metode tradisional, karena metode tersebut menghasilkan lebar selang yang lebih pendek.

4. Kesimpulan

Metode yang lebih baik di dalam menghitung selang kepercayaan bagi satu dan dua parameter distribusi eksponensial di bawah sensor tipe-II ialah metode bootstrap persentil. Metode tersebut menghasilkan lebar selang yang lebih sempit apabila dibandingkan dengan metode tradisional.

5. Rujukan

Bain, L. J. dan Max Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Jilid 2. Boston: PSW-KENT Publishing Company.

Bury, K. 1999. *Statistical Distributions in Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cox, D.R. and D. Oakes. 1984. *Analysis of Survival Data*. London: Chapman & Hall.

Efron, B. dan Tibshirani R. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall.

Fauzy, A. dan N.A. Ibrahim. 2002a. Interval Konfidensi untuk Satu Parameter Distribusi Eksponensialsial di bawah Sensor Lengkap dengan Metode Bootstrap Persentil. *jurnal MATEMATIKA*, Universitas Negeri Malang, Tahun VIII, Nomor 1, April 2002, ISSN 0852-7792, Akreditasi DIKTI No.: 69/DIKTI/Kep/ 2000, hal. 70-77

Fauzy, A. dan N.A. Ibrahim. 2002b. *Selang Kepercayaan bagi Dua Parameter Distribusi Eksponensial di bawah SensorLengkap dengan Metode Bootstrap Persentil*. Kertas Kerja dalam Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-10, Universiti Teknologi Malaysia, Hotel Puteri Pan Pacific, Johor Bahru, 23-24 Disember 2002

Lawless. 1982. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley & Sons.