

# Carta Kawalan XmR Dan Median : Satu Penyelesaian Untuk Data Pencong

NORIZAN MOHAMED, WAN MUHAMAD AMIR BIN W AHMAD,  
RINNER MASLI

Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, Universiti Malaysia Terengganu  
(UMT), 21030 Kuala Terengganu, Terengganu.

## ABSTRAK

Carta kawalan banyak digunakan dalam kawalan mutu berstatistik. Tujuan menggunakan carta kawalan ini adalah untuk memastikan sesuatu proses berada dalam keadaan terkawal dan stabil sepanjang masa secara grafik. Carta kawalan ini terdiri daripada had-had kawalan iaitu, had kawalan atas, had kawalan tengah dan had kawalan bawah. Untuk mengetahui sesuatu proses tersebut adalah terkawal, kesemua titik yang mewakili variasi dalam sesuatu proses berada di dalam lingkungan had atas dan had bawah. Jika terdapat titik yang terkeluar daripada had kawalan atas mahupun had kawalan bawah, maka proses tersebut dikatakan tidak terkawal dan tidak stabil. Salah satu penggunaan carta kawalan yang meluas ialah carta kawalan XmR iaitu X mewakili nilai individu manakala mR mewakili peralihan julat. Untuk memastikan sesuatu proses tersebut berada dalam keadaan terkawal dan stabil, anggapan kenormalan mestilah dipenuhi. Namun demikian, kebanyakan proses pengeluaran menghasilkan data yang pencong dan ini menyebabkan proses tersebut tidak terkawal dan tidak stabil. Oleh itu, satu pendekatan berdasarkan kuasa penjelmaan akan turut dibincangkan dalam kajian ini.

## 1. PENGENALAN

Salah satu penggunaan carta kawalan yang sangat meluas ialah carta  $XmR$  ( $X$  adalah nilai individu,  $mR$  adalah peralihan julat) yang telah dimajukan oleh Schwartz. Carta ini khususnya digunakan apabila terdapat hanya satu pemerhatian dalam setiap jangka masa. Tujuan untuk menghasilkan carta kawalan termasuk carta  $XmR$  adalah untuk melihat samada sesuatu variasi itu disebabkan oleh kebetulan atau disebabkan oleh perubahan dalam proses tersebut. Setiap proses akan mempamerkan beberapa variasi dalam hasil penjagaan.

Selain itu, carta kawalan  $XmR$  ini boleh digunakan untuk menilai kedua-dua data berpembolehubah dan data berbentuk sifat atau ciri-ciri. Carta  $XmR$  menunjukkan data-data yang tidak menyumbang mereka untuk membentuk subkumpulan dengan lebih daripada satu ukuran. Kita boleh menggunakan carta kawalan jenis ini jika sebagai contoh, sesuatu proses tersebut seringkali berulang dengan sendirinya atau ia muncul untuk beroperasi secara berlainan pada masa yang berbeza. Jika kes seperti ini wujud, menjadikan data dalam bentuk kumpulan mungkin menyembunyikan kesan-kesan pada perbezaan tersebut. Kita boleh mengelakkan masalah ini dengan menggunakan carta  $XmR$  bila-bila sahaja apabila tidak ada dasar yang rasional untuk menjadikan data dalam bentuk kumpulan.

## 2. KAJIAN TERHADAP CARTA KAWALAN XmR UNTUK DATA PENCONG

Data pencong dijana secara rawak daripada taburan eksponen menggunakan fungsi dalam Maple yang ditakrifkan sebagai [stats [random, exponential [1,0]] (100)]. Fungsi ketumpatan kebarangkalian untuk taburan eksponen dengan parameter  $\lambda > 0$  adalah  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ . Domain adalah  $0 \leq x < +\infty$ . Fungsi ketumpatan boleh diitlakkan untuk sebarang domain dalam bentuk  $a \leq x < \infty$  yang mana  $a \geq 0$ . Dengan ini, fungsi ketumpatan kebarangkalian adalah  $f(x) = \lambda e^{-\lambda (x-a)}$ .

Apabila  $a = 0$ , kadang kala taburan ini dinamakan taburan eksponen satu-parameter. Sebagai tambahan, apabila  $\lambda = 1$ , ia dinamakan taburan eksponen piawai. Taburan eksponen digunakan untuk menerangkan taburan yang berbentuk masa tunggu di antara titik asalan dalam masa dengan kejadian sesuatu fenomena atau yang berbentuk masa tunggu di antara

dua kejadian fenomena rawak. Fenomena rawak ini mungkin, sebagai contoh, kegagalan pada komponen elektronik. Taburan eksponen mempunyai sifat yang mana selalunya diterangkan sebagai kekurangan ingatan iaitu kebarangkalian bersyarat pada unit masa  $t$  tunggu yang ditentukan tiada kejadian sepanjang unit masa  $a$  terdahulu yang mana sama dengan kebarangkalian tak-bersyarat pada unit masa  $t$  tunggu dari permulaan. Ini bermaksud umpamanya, jika kita mula sekali lagi, tetapi kita terlupa bahawa kita sudah mempunyai unit masa  $a$  tunggu. Taburan eksponen merupakan kes khas daripada taburan Gamma. Bagi taburan eksponen satu-parameter, fungsi taburan ialah  $1 - e^{-\lambda x}$ , varians ialah  $\frac{1}{\lambda^2}$ , fungsi

penjana momen ialah  $\frac{\lambda}{\lambda - t}$  untuk  $t < 0$  dan min ialah  $\frac{1}{\lambda}$ .

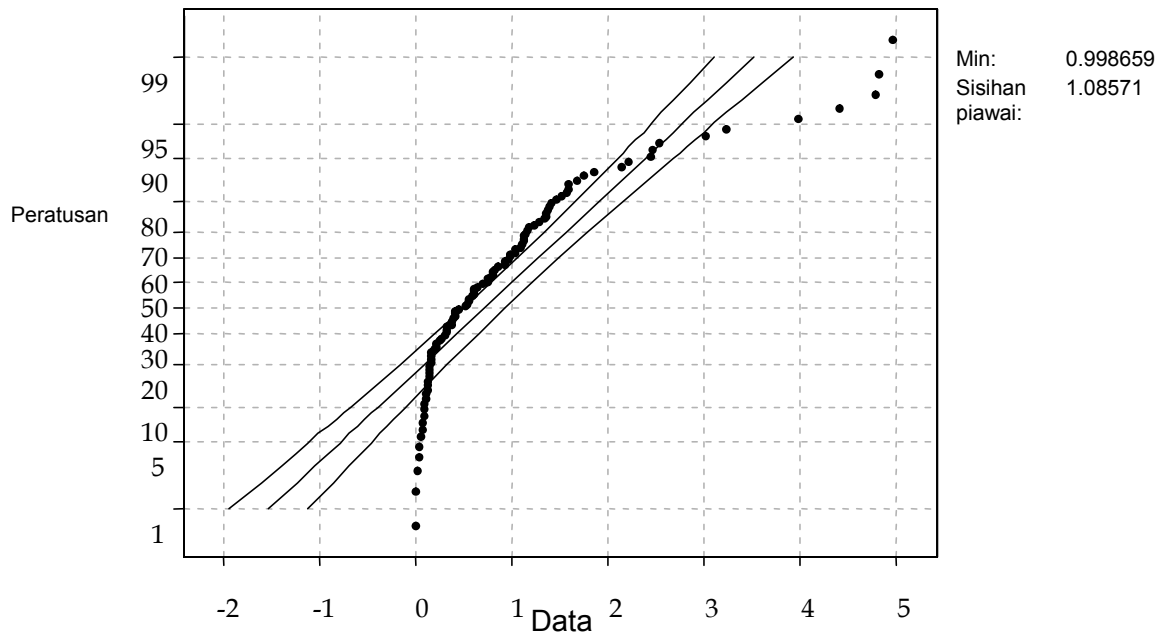
Jadual 1 menunjukkan pemerhatian bagi 100 nombor rawak daripada taburan eksponen dengan nilai  $\lambda = 1$  dan nilai lalai  $a = 0$ .

0.5576022374	0.3872971887	0.4210353075	0.6429411499	0.81748376
1.373393261	0.03258747280	1.283644354	0.9271131180	1.368768981
0.3008510071	0.3711730891	1.595433881	0.03995736238	0.092587518
3.231425091	1.676221394	0.6046730763	1.032912741	2.533571158
3.017028029	0.1583936938	0.169118024	0.5610540006	0.745343010
0.3182795837	0.2481538417	1.126959091	1.867389738	1.128465870
0.3303652134	1.572604182	1.391144260	0.989838899	0.376507583
0.0058799177	0.07776010900	1.032382072	0.141454992	1.114971448
0.1456468999	4.784076242	0.602595347	1.358162718	0.698244768
0.2219613449	1.744346187	4.815714356	0.1242962184	0.416740024
1.586670573	0.9928475051	1.333515909	0.5134870053	0.196398054
2.463048924	0.3303319341	0.6053208353	1.465486541	0.084146152
0.9291913750	0.8050204357	2.221145600	0.968439202	2.440173017
0.7459531583	0.5932540102	3.989526695	0.533496627	4.960061065
0.1715329767	2.141311642	0.4140965877	0.068185272	0.127289870
0.8536857518	0.1632849934	0.8061115282	0.086447156	0.445712689
1.144402258	1.236977305	0.2627998817	1.183532178	0.208627736
0.0108778160	0.05584129266	0.7811839720	0.112279514	1.162267830
0.0261512239	0.1289960630	1.094487711	0.102471819	1.516051088
4.405142995	1.121466281	0.1439285312	1.405964894	0.151766191

Kemudian, 100 pemerhatian daripada taburan eksponen tersebut diplot. Seperti yang dijangkakan, plot kebarangkalian normal untuk 100 pemerhatian tersebut dalam Rajah 1 menunjukkan bahawa data tersebut tidak mematuhi taburan normal iaitu, data merupakan data pencong. Melalui Rajah 1 dapat diperhatikan bahawa data-data yang diplotkan pada teori taburan normal menghasilkan titik-titik yang tidak berbentuk seperti garis lurus. Ini bermakna data tersebut terpesong daripada kenormalan dan ia merupakan taburan pencong. Taburan pencong menerangkan suatu populasi yang mana nilai pembahagian di sekitar min adalah tidak sama. Dalam kepencongan positif, terdapat nombor kecil pada nilai yang sangat besar. Ini bermakna bahawa apabila lengkung ditarik, terdapat ekor yang panjang selepas puncak lengkungan tersebut. Secara statistik, mod lebih rendah berbanding median, kemudian min adalah yang tertinggi, ditarik ke atas dengan efektif oleh beberapa kesudahan yang tinggi.

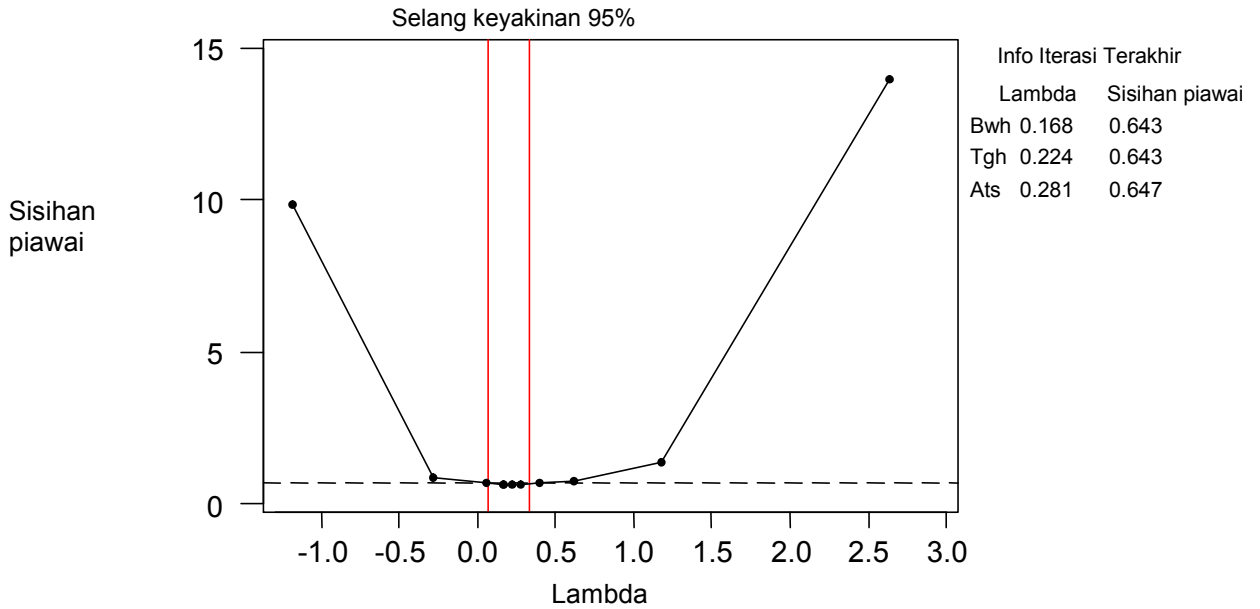
Dalam kepencongan yang negatif pula, keadaan yang sebaliknya berlaku. Terdapat nombor yang kecil pada nilai yang kecil. Ekor muncul sebelum puncak dan min adalah yang terkecil diikuti oleh median dan mod.

Plot kebarangkalian normal

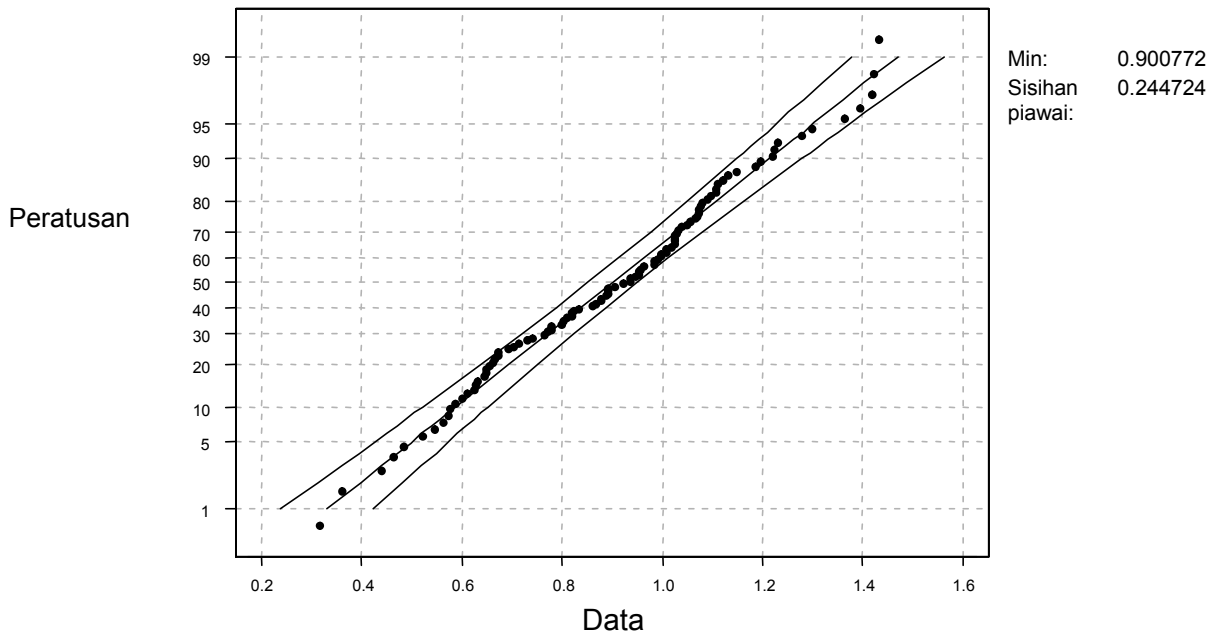


**Rajah 1.** Plot kebarangkalian normal untuk 100 pemerhatian dalam Jadual 1

Oleh yang demikian, prosedur Box-Cox menggunakan MINITAB digunakan untuk menentukan nilai  $\lambda$  yang sesuai untuk kuasa transformasi. Rajah 2 menunjukkan nilai  $\lambda$  adalah 0.224. Setiap pemerhatian dalam Jadual 1 kemudiannya diterbitkan kepada kuasa 0.224. Plot kebarangkalian normal untuk pemerhatian yang telah ditransformasi ditunjukkan dalam Rajah 3. Seperti yang dapat diperhatikan, kesan daripada transformasi adalah istimewa. Tidak seperti pemerhatian asal, nilai yang telah ditransformasi adalah agak sepadan dengan taburan normal.



**Rajah 2.** Plot Box-Cox untuk 100 pemerhatian dalam Jadual 1



**Rajah 3.** Plot kebarangkalian normal untuk 100 pemerhatian yang telah ditransformasi

Data-data yang telah ditransformasi tersebut kemudiannya dijadikan subkumpulan yang mana setiap satunya bersaiz 5. Ini menjadikan pemerhatian kepada 20 kumpulan. Lima pemerhatian pertama (rujuk Jadual 1) dalam baris pertama, dikira dari kiri ke kanan, setiap satunya diterbitkan kepada kuasa 0.224, daripada subkumpulan pertama; pemerhatian ke-6 hingga ke-10, dikira dari kiri ke kanan setiap satunya diterbitkan kepada kuasa 0.224, daripada subkumpulan kedua; dan hinggalah ke subkumpulan yang ke-20 yang mana mengandungi lima pemerhatian yang terakhir dalam baris terakhir pada Jadual 1, setiap satunya diterbitkan kepada kuasa 0.224. 20 subkumpulan dengan median subkumpulan dan julat median subkumpulan diberikan dalam Jadual 2.

No. Subkumpulan	Pemerhatian					Median Subkumpulan, $\tilde{X}$	Julat Median Subkumpulan, MR
	X1	X2	X3	X4	X5		
1	0.87725	0.80841	0.82369	0.90571	0.95582	0.87725	
2	1.07373	0.46409	1.05759	0.98317	1.07292	1.05759	0.18034
3	0.7639	0.80074	1.11043	0.48579	0.58652	0.7639	0.29369
4	1.30082	1.12279	0.89333	1.00729	1.23176	1.12279	0.35889
5	1.28095	0.66155	0.67134	0.87846	0.93622	0.87846	0.24433
6	0.77361	0.73162	1.02716	1.15031	1.02747	1.02716	0.1487
7	0.7801	1.10684	1.07683	0.99771	0.8033	0.99771	0.02945
8	0.31612	0.56401	1.00717	0.64499	1.0247	0.64499	0.35272
9	0.64923	1.42044	0.89264	1.07105	0.92262	0.92262	0.27763
10	0.71355	1.13287	1.42254	0.62656	0.8218	0.8218	0.10082
11	1.10905	0.99839	1.06666	0.86118	0.69424	0.99839	0.17659
12	1.22398	0.78008	0.89355	1.08947	0.57408	0.89355	0.10484
13	0.98367	0.95253	1.19594	0.99284	1.22143	0.99284	0.09929
14	0.9364	0.88952	1.36376	0.8686	1.43199	0.9364	0.05644
15	0.67348	1.18616	0.82063	0.54763	0.62991	0.67348	0.26292
16	0.96515	0.66608	0.95282	0.57756	0.83428	0.83428	0.1608
17	1.03071	1.04884	0.74109	1.0385	0.7037	1.03071	0.19643
18	0.36287	0.52365	0.94614	0.61243	1.03429	0.61243	0.41828
19	0.44174	0.63179	1.02045	0.60001	1.09779	0.63179	0.01936
20	1.3944	1.02604	0.6475	1.07939	0.65525	1.02604	0.39425

Jadual 2. Subkumpulan bersaiz 5 untuk pemerhatian yang telah ditransformasi.

Kemudian, dengan menggunakan rumus di bawah, carta kawalan  $XmR$  diplot.

$$\sum_{i=1}^{20} \tilde{X}_i = 17.74418$$

$$\bar{\tilde{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{20} \tilde{X}_i}{20} = 0.8872$$

$$\sum_{i=1}^{19} MR_i = 3.87577$$

$$\overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^{19} MR_i}{19} = 0.2040$$

Had kawalan bagi carta individu,  $X$  ditentukan seperti berikut:

$$\begin{aligned} UCL^x &= \bar{\tilde{X}} + E2 \overline{MR} \\ &= 0.887209 + (2.660)(0.2040) \\ &= 1.430 \end{aligned}$$

$$CL = \bar{\tilde{X}} = 0.8872$$

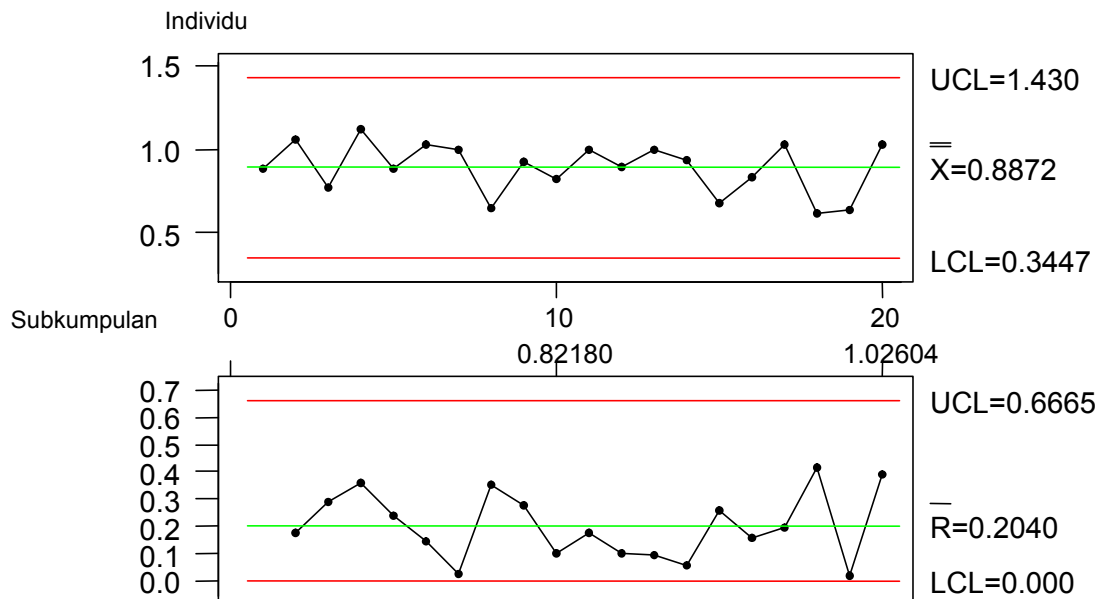
$$\begin{aligned} LCL_x &= \bar{\tilde{X}} - E2 \overline{MR} \\ &= 0.887209 - (2.660)(0.2040) \\ &= 0.3447 \end{aligned}$$

Had kawalan bagi carta peralihan julat, mR ditentukan seperti berikut:

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= D4 * \overline{MR} \\ &= 3.268 \times 0.2040 \\ &= 0.6665 \\ CL &= \overline{MR} = 0.2040 \\ LCL_{MR} &= D3 * \overline{MR} \\ &= 0.000 \times 0.2040 \\ &= 0.000 \end{aligned}$$

Rajah 4 menunjukkan carta kawalan XmR yang telah diplot menggunakan MINITAB. Melalui rajah tersebut, dapat disimpulkan bahawa sesuatu proses yang melibatkan data rawak yang telah ditransformasi adalah stabil yang mana semua titik berada di dalam lingkungan had atas dan had bawah. Dengan ini, jelaslah bahawa carta kawalan XmR berdasarkan persamaan yang diberikan boleh digunakan untuk menjadikan sesuatu proses berada dalam kawalan walaupun pada mulanya proses tersebut berada di luar kawalan.

CARTA XmR



**Rajah 4.** Carta XmR untuk median 20 subkumpulan dalam Jadual 2

Kemudian, melalui Jadual 2, median subkumpulan dan julat subkumpulan diperolehi dan ditunjukkan dalam Jadual 3. Setelah itu, carta median diplot berdasarkan rumus berikut:

$$\sum_{i=1}^{20} \tilde{X}_i = 17.74418$$

t Carta Kawalan XmR Dan Median : Satu Penyelesaian Untuk Data Pencong 27

$$\bar{\tilde{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{20} \tilde{X}_i}{20} = 0.8872$$

$$\sum_{i=1}^{20} R_i = 10.77241$$

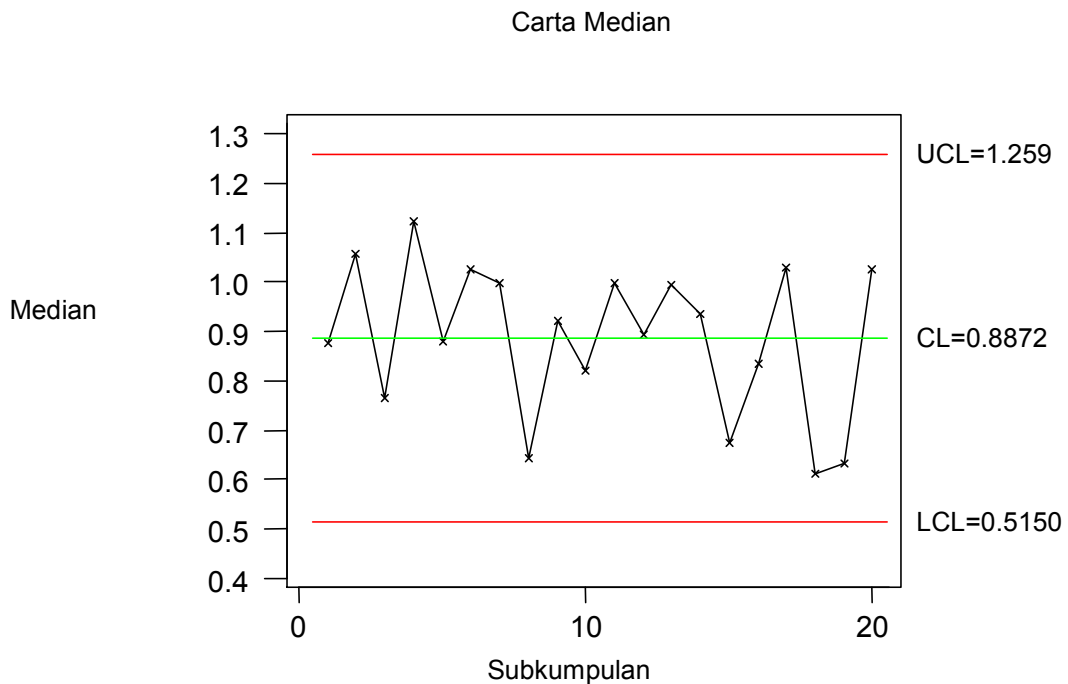
$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{20} R_i}{20} = 0.53862$$

$$\begin{aligned} \text{UCL}_{\tilde{X}} &= \bar{\tilde{X}} + A_2 m(\bar{R}) \\ &= 0.8872 + (0.691)(0.53862) \\ &= 1.2594 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LCL}_{\tilde{X}} &= \bar{\tilde{X}} - A_2 m(\bar{R}) \\ &= 0.8872 - (0.691)(0.53862) \\ &= 0.5150 \end{aligned}$$

No. Subkumpulan	Pemerhatian					Median Subkumpulan, $\tilde{X}$	Julat Subkumpulan, R
	X1	X2	X3	X4	X5		
1	0.87725	0.80841	0.82369	0.90571	0.95582	0.87725	0.14741
2	1.07373	0.46409	1.05759	0.98317	1.07292	1.05759	0.60964
3	0.7639	0.80074	1.11043	0.48579	0.58652	0.7639	0.62464
4	1.30082	1.12279	0.89333	1.00729	1.23176	1.12279	0.40749
5	1.28095	0.66155	0.67134	0.87846	0.93622	0.87846	0.6194
6	0.77361	0.73162	1.02716	1.15031	1.02747	1.02716	0.41869
7	0.7801	1.10684	1.07683	0.99771	0.8033	0.99771	0.32674
8	0.31612	0.56401	1.00717	0.64499	1.0247	0.64499	0.70858
9	0.64923	1.42044	0.89264	1.07105	0.92262	0.92262	0.77121
10	0.71355	1.13287	1.42254	0.62656	0.8218	0.8218	0.79598
11	1.10905	0.99839	1.06666	0.86118	0.69424	0.99839	0.41481
12	1.22398	0.78008	0.89355	1.08947	0.57408	0.89355	0.6499
13	0.98367	0.95253	1.19594	0.99284	1.22143	0.99284	0.2689
14	0.9364	0.88952	1.36376	0.8686	1.43199	0.9364	0.56339
15	0.67348	1.18616	0.82063	0.54763	0.62991	0.67348	0.63853
16	0.96515	0.66608	0.95282	0.57756	0.83428	0.83428	0.38759
17	1.03071	1.04884	0.74109	1.0385	0.7037	1.03071	0.34514
18	0.36287	0.52365	0.94614	0.61243	1.03429	0.61243	0.67142
19	0.44174	0.63179	1.02045	0.60001	1.09779	0.63179	0.65605
20	1.3944	1.02604	0.6475	1.07939	0.65525	1.02604	0.7469

**Jadual 3.** Median subkumpulan dan julat subkumpulan untuk 20 kumpulan bagi pemerhatian yang telah ditransformasi.



**Rajah 5.** Carta median untuk pemerhatian dalam Jadual 3.

Berdasarkan Rajah 5 di atas, kesemua titik berada dalam lingkungan had atas dan had bawah. Ini menunjukkan bahawa proses tersebut adalah stabil. Dengan ini, carta median juga merupakan salah satu carta kawalan yang boleh memimpin sesuatu proses supaya berada dalam kawalan.

Perhatian bahawa, dalam rumus-rumus yang digunakan untuk membina carta kawalan tersebut, E2, D3, D4 dan A2 merupakan faktor-faktor carta kawalan (rujuk dalam Lampiran) yang mana nilainya bergantung kepada saiz subkumpulan.

### 3. KESIMPULAN

Tidak dapat dipertikaikan lagi bahawa carta kawalan XmR dan median boleh diaplikasikan secara meluas dalam kawalan mutu berstatistik yang banyak digunakan dalam industri pengeluaran, pembuatan dan sebagainya. Walaubagaimanapun, pertunjukannya mudah dipengaruhi oleh data-data yang mempunyai taburan tidak normal. Justeru itu, melalui kajian ini kami menyarankan agar taburan yang terlibat dalam pembinaan carta kawalan hendaklah diambil tahu terlebih dahulu. Jika taburan yang digunakan adalah normal, carta kawalan boleh dibina terus tetapi jika sebaliknya, prosedur yang dibincangkan dalam kajian ini boleh diaplikasikan.

### 4. RUJUKAN

Chong. M. K. B. 2004. Overcoming The Problems Of The  $\bar{X}$  Control Chart For Skewed Distribution. Proceeding Of Integrating Technology In Mathematical Science. 601-608

Grant. E. L. dan Leavenworth. R. S. 1999. Statistical Quality Control. WCB McGraw-Hill. New York

John. A. R., Martha. L. A. dan James. P. B. (2003). Statistics With Maple. Academic Press.

Robert. V. H dan Elliot. A. T. 2001. Probability And Statistical Inference. Prentice Hall International, Inc.



LAMPIRAN

Faktor-faktor Carta Kawalan XmR

Saiz Subkumpulan	E2	D3	D4
1	2.660	0.000	3.268
2	2.660	0.000	3.268
3	1.772	0.000	2.574
4	1.457	0.000	2.282
5	1.29	0.000	2.114
6	1.184	0.000	2.004
7	1.109	0.076	1.924
8	1.054	0.136	1.864
9	1.01	0.184	1.816
10	0.975	0.223	1.777

Faktor-faktor Carta Kawalan Median

n	A2	D4
3	1.187	2.575
5	0.691	2.115
7	0.508	1.924
9	0.412	1.816

