

Nilai Kritis Permutasi Eksak untuk Anova Satu Arah Kruskal-Wallis pada Kasus Banyaknya Sampel, $k = 4$

INNE MARLIANI, YAYAT KARYANA, DAN ACENG KOMARUDIN MUTAQIN

Jurusan Statistika FMIPA Unisba

ABSTRAK

Makalah ini membahas tentang nilai kritis permutasi eksak untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis untuk kasus dengan banyaknya sampel, $k = 4$, dengan batasan bahwa ukuran sampelnya $n_1+n_2+n_3+n_4 < 9$. Nilai kritis permutasi eksak penentuan nilai kritisnya didasarkan pada distribusi sampling eksak dari statistik uji Kruskal-Wallis (H), dimana penentuan distribusinya didasarkan pada permutasi dari peringkat-peringkat pada setiap sampel.

Kata Kunci : ANOVA satu arah Kruskal-Wallis, permutasi, nilai kritis permutasi eksak

1. Pendahuluan

Hampir semua prosedur pengujian hipotesis yang dibicarakan sejauh ini didasarkan pada asumsi bahwa sampel acaknya diambil dari populasi yang berdistribusi normal. Namun ternyata pada prakteknya kadang-kadang asumsi tersebut tidak dapat terpenuhi sehingga memerlukan prosedur pengujian yang lain yaitu metode statistika yang dikelompokkan ke dalam statistika nonparametrik. Metode statistika nonparametrik ini merupakan metode bebas distribusi yang tidak mengasumsikan pengetahuan apapun mengenai distribusi populasinya kecuali bahwa distribusi itu kontinu (Walpole, 1988). Dalam statistika nonparametrik, banyak prosedur yang dapat dilakukan salah satunya adalah ANOVA satu arah Kruskal-Wallis yang digunakan untuk menguji H_0 bahwa beberapa sampel telah ditarik dari populasi-populasi yang sama (Daniel, 1989). ANOVA satu arah Kruskal-Wallis ini menggunakan data dari tiga sampel bebas atau lebih, yang dimaksud sampel bebas disini adalah tidak ada hubungan atau kaitan di antara anggota-anggota sampel dan antara beberapa sampel yang diselidiki (Daniel, 1989). Selain itu juga ANOVA satu arah Kruskal-Wallis tidak memerlukan asumsi bahwa sampel berasal dari populasi yang berdistribusi normal dan tidak mengasumsikan bahwa populasinya mempunyai varians yang homogen (Odiase dan Ogbonmwan, 2005). ANOVA satu arah Kruskal-Wallis sering digunakan dalam berbagai bidang, seperti bidang kesehatan (Daniel, 1989), bidang pendidikan (Siegel, 1985) dan bidang industri (Walpole, 1988).

Kaidah pengambilan keputusan (*decision rule*) dapat dilakukan berdasarkan nilai kritis atau nilai p (*p-value*). Nilai kritis (*critical value*) adalah nilai yang memisahkan daerah penerimaan dan daerah kritis (Walpole dan Myers, 1995). Dalam beberapa tahapan analisis statistika sudah merupakan kebiasaan memilih α sebesar 0.05 atau 0.01 dan kemudian didapatkan nilai kritis, yang menentukan daerah penolakan atau penerimaan H_0 . Sedangkan nilai- p (*p-value*) adalah peluang menolak H_0 padahal H_0 benar.

Secara umum untuk menentukan nilai kritis ada dua cara yang dapat digunakan dalam ANOVA satu arah Kruskal-Wallis yaitu menggunakan cara pendekatan distribusi chi-kuadrat dan dengan cara menggunakan distribusi sampling eksak dari statistik uji Kruskal-Wallis (H). Penentuan nilai kritis dengan cara pendekatan kepada distribusi chi-kuadrat diterapkan jika banyaknya sampel, $k = 3$, dan masing-masing ukuran sampelnya, $n_i \geq 6$, untuk $i = 1, 2, 3$ atau banyaknya sampel, $k > 3$, dan ukuran sampelnya, $n_i \geq 5$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$ (Devore, 1982 dan Rohatgi, 1984 dalam Odiase dan Ogbonmwan, 2005). Untuk ukuran sampel yang kecil, $n_i \leq 5$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$ dan banyaknya sampel berapapun, pendekatan kepada distribusi chi-kuadrat bukan merupakan pendekatan yang bagus (Odiase dan Ogbonmwan, 2005).

Kruskal dan Wallis pada tahun 1952 (Gibbons, 1971) menyediakan nilai kritis permutasi eksak untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis untuk kasus ukuran sampel kurang dari atau sama dengan 5. Sayangnya nilai kritis yang didasarkan pada distribusi sampling eksak dari statistik uji Kruskal-Wallis (H) tersebut hanya berlaku untuk banyaknya sampel, $k=3$, dimana penentuan distribusinya didasarkan pada permutasi dari peringkat-peringkat pada setiap sampel.

Pada kenyataannya di lapangan, bisa terjadi banyaknya sampel lebih dari 3. Maka dari itu dibutuhkan nilai kritis permutasi eksak untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis dengan kasus banyaknya sampel, $k = 4$, dan ukuran sampelnya, $n_i \leq 5$, untuk $i = 1, 2, 3, 4$. Tujuan dari makalah ini adalah untuk menentukan nilai kritis permutasi eksak dari ANOVA satu arah Kruskal-Wallis untuk kasus banyaknya sampel, $k = 4$, dan ukuran sampelnya, $n_i \leq 5$, untuk $i = 1, 2, 3, 4$, namun dengan batasan ukuran sampelnya, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 < 9$.

2. ANOVA Satu Arah Kruskal-Wallis

ANOVA satu arah Kruskal-Wallis adalah teknik nonparametrik yang digunakan untuk menguji H_0 yang menyatakan bahwa beberapa sampel telah ditarik dari populasi-populasi yang sama atau identik (Daniel, 1989). ANOVA satu arah Kruskal-Wallis ini menggunakan data dari tiga sampel bebas atau lebih. Adapun asumsi-asumsi pada ANOVA satu arah Kruskal-Wallis adalah sebagai berikut:

1. Data untuk analisis terdiri atas k sampel acak berukuran n_1, n_2, \dots, n_k
2. Pengamatan-pengamatan bebas baik di dalam maupun diantara sampel-sampel
3. Variabel yang diminati kontinu
4. Skala yang digunakan setidaknya ordinal
5. Populasi-populasi identik kecuali dalam hal lokasi yang mungkin berbeda untuk sekurang-kurangnya satu populasi

Selain itu juga ANOVA satu arah Kruskal-Wallis tidak memerlukan asumsi bahwa sampel berasal dari populasi yang berdistribusi normal dan tidak mengasumsikan bahwa populasinya mempunyai varians yang homogen (Odiase dan Ogbonmwan, 2005).

Hipotesis yang digunakan dalam ANOVA satu arah Kruskal-Wallis adalah sebagai berikut.

$$H_0 : F_1(X) = F_2(X) = \dots = F_k(X)$$

$$H_1 : \text{Sekurang-kurangnya ada satu tanda} = \text{tidak berlaku}$$

Misalkan diambil k sampel bebas $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i} \sim X$ $i = 1, 2, \dots, k$

Ukuran sampel keseluruhan adalah : $N = \sum_{i=1}^k n_i$

Berikut ini adalah struktur data untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis

Tabel 1. Struktur Data untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis

Sampel				
1	2	3	...	K
x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	x_{k1}
x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	x_{k2}
x_{13}	x_{23}	x_{33}	...	x_{k3}
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
x_{1n_1}	x_{2n_2}	x_{3n_3}	...	x_{kn_k}

Gantikan masing-masing nilai pengamatan yang asli dengan peringkatnya yang relatif terhadap semua nilai pengamatan dalam k sampel. Peringkat 1 berikan kepada nilai yang paling kecil, peringkat 2 berikan kepada yang berikutnya dan seterusnya sampai ke nilai yang

Nilai Kritis Permutasi Eksak untuk ANOVA Satu Arah Kruskal-Wallis 67
pada Kasus Banyaknya Sampel, $k = 4$

paling besar diberi peringkat N . Jumlah peringkat dari data pengamatan pada sampel ke- i dinyatakan oleh R_i . Berikut ini adalah struktur peringkat data untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis dimana peringkat dari data pengamatan pada tabel di bawah ini dinyatakan oleh r .

Tabel 2. Struktur Peringkat Data untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis

	Sampel				
	1	2	3	...	k
	r_{11}	r_{21}	r_{31}	...	r_{k1}
	r_{12}	r_{22}	r_{32}	...	r_{k2}
	r_{13}	r_{23}	r_{33}	...	r_{k3}
	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
	r_{1n_1}	r_{2n_2}	r_{3n_3}	...	r_{kn_k}
Jumlah Peringkat	R_1	R_2	R_3	...	R_k

Berikut adalah statistik uji untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \quad (1)$$

dimana

- H : Statistik uji untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis
- N : Ukuran sampel keseluruhan
- R_i : Jumlah peringkat dari data pengamatan pada sampel ke- i
- k : Banyaknya sampel
- n_i : Ukuran sampel ke- i

Statistik uji di atas merupakan statistik uji ANOVA satu arah Kruskal-Wallis untuk data pengamatan yang tidak ada data kembar. Kriteria uji untuk Uji Kruskal-Wallis adalah tolak H_0 ketika $H \geq c$. Selanjutnya nilai c harus dipilih sedemikian sehingga pengujian mempunyai taraf arti α . Dengan demikian nilai c merupakan nilai kritis dari distribusi statistik uji Kruskal-Wallis (H) ketika H_0 benar (Odiase dan Ogbonmwan, 2005).

3. Penentuan Nilai Kritis Permutasi Eksak

Disebut eksak karena penentuan nilai kritisnya didasarkan pada distribusi sampling dari statistik uji Kruskal-Wallis (H), yang dimana penentuan distribusinya didasarkan pada permutasi dari peringkat-peringkat pada setiap sampel. Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya (Walpole dan Myers, 1995). Untuk menentukan nilai kritis permutasi eksak dapat dilakukan prosedur sebagai berikut:

1. Misalkan terdapat k buah sampel dengan ukuran sampelnya masing-masing adalah n_1, n_2, \dots, n_k .
2. Buatlah M buah susunan peringkat yang mungkin untuk seluruh data pengamatan pada k buah sampel (Catatan : data pengamatannya tidak ada yang kembar), dimana

$$M = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (2)$$

3. Hitung statistik uji Kruskal-Wallis, H , untuk seluruh M buah susunan peringkat yang mungkin. Jadi berdasarkan langkah ini akan diperoleh M buah statistik uji Kruskal-Wallis yaitu H_1, H_2, \dots, H_M .
4. Bentuk tabel distribusi frekuensi dan nilai peluangnya untuk M buah statistik uji Kruskal-Wallis di atas.
5. Hitung nilai peluang untuk setiap nilai statistik uji Kruskal-Wallis yang berbeda yang ada pada tabel distribusi frekuensi di atas, dengan menggunakan rumus berikut ini :

$$p_l = \frac{f_l}{M} ; \text{ untuk } l = 1, 2, \dots, t \tag{3}$$

dimana

p_l : Nilai peluang untuk statistik uji Kruskal-Wallis urutan ke- l yang ada pada tabel distribusi frekuensi.

f_l : Frekuensi banyaknya nilai statistik uji Kruskal-Wallis ke- l yang ada pada tabel distribusi frekuensi.

t : Banyaknya nilai statistik uji Kruskal-Wallis yang berbeda yang ada pada tabel distribusi frekuensi.

6. Nilai kritis permutasi eksak yang berukuran α (taraf arti) dapat dihitung berdasarkan rumus berikut:

$$1 - p(H < H_{(l)}) = 1 - (p_1 + \dots + p_{l-1}) = \alpha ; \text{ untuk } l = 2, \dots, t \tag{4}$$

dimana $H_{(l)}$ adalah nilai kritis permutasi eksak untuk ANOVA satu-arah Kruskal-Wallis, yaitu nilai statistik uji Kruskal-Wallis urutan ke- l yang ada pada tabel distribusi frekuensi.

4. Perhitungan Nilai Kritis Permutasi Eksak untuk ANOVA Satu Arah Kruskal-Wallis

Dalam menentukan nilai kritis permutasi eksak untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis, terlebih dahulu harus diketahui nilai statistik uji Kruskal-Wallis dan nilai peluangnya. Dengan menggunakan bantuan program yang dioperasikan pada perangkat lunak Matlab diperoleh nilai statistik uji Kruskal-Wallis dan nilai peluang untuk kasus banyaknya sampel, $k = 4$, dengan batasan ukuran sampel $n_1+n_2+n_3+n_4 < 9$.

Dari distribusi frekuensi statistik uji Kruskal-Wallis dapat dibuat ringkasan nilai kritis permutasi eksak untuk ANOVA satu arah Kruskal-Wallis dan nilai α (taraf arti) untuk $k = 4$, dengan batasan ukuran sampel $n_1+n_2+n_3+n_4 < 9$ yang kemudian disajikan dalam tabel berikut ini.

Tabel 3. Nilai Kritis Permutasi Eksak

Ukuran sampel				Nilai kritis (Statistik Uji)	α (p-value)
n_1	n_2	n_3	n_4		
2	1	1	1	3.8000	0.4000
2	2	1	1	4.2857	0.2667
				4.7143	0.1333
3	1	1	1	4.4286	0.2000
2	2	2	1	4.1786	0.2762
				4.5000	0.2571
				4.7143	0.2000
				4.8214	0.1810
				5.0357	0.1238

Nilai Kritis Permutasi Eksak untuk ANOVA Satu Arah Kruskal-Wallis 69
pada Kasus Banyaknya Sampel, $k = 4$

Ukuran sampel				Nilai kritis (Statistik Uji)	α (p-value)
n_1	n_2	n_3	n_4		
				5.3571	0.0667
				5.6786	0.0381
3	2	1	1	4.0357	0.2476
				4.1786	0.2095
				4.5714	0.2000
				4.5714	0.1667
				4.6071	0.1524
				4.8929	0.1429
				4.8929	0.1000
				5.1429	0.0857
				5.4643	0.0571
4		1	1	4.1250	0.2857
				4.9286	0.1143
2	2	2	2	4.5000	0.2667
				4.6667	0.2095
				4.8333	0.1714
				5.1667	0.1619
				5.3333	0.1238
				5.5000	0.1143
				5.6667	0.0762
				6.0000	0.0667
				6.1667	0.0381
				6.6667	0.0095
3	2	2	1	4.0556	0.2857
				4.1389	0.2738
				4.1389	0.2655
				4.2222	0.2619
				4.2222	0.2583
				4.2500	0.2548
				4.4722	0.2333
				4.4722	0.2238
				4.5000	0.2167
				4.5556	0.2024
				4.5556	0.1976
				4.5833	0.1952

Ukuran sampel				Nilai kritis (Statistik Uji)	α (p-value)
n_1	n_2	n_3	n_4		
				4.7222	0.1905
				4.7222	0.1815
				4.8056	0.1738
				4.8056	0.1685
				5.0000	0.1643
				5.1389	0.1548
				5.1667	0.1357
				5.2500	0.1333
				5.3889	0.1095
				5.5556	0.0714
				5.5556	0.0655
				5.5833	0.0619
				5.8056	0.0571
				5.8056	0.0506
				5.8333	0.0429
				6.0000	0.0357
				6.0556	0.0286
				6.0556	0.0250
				6.2500	0.0214
6.5000	0.0143				
3	3	1	1	3.8889	0.2964
				4.1111	0.2893
				4.1111	0.2214
				4.2222	0.2036
				4.2222	0.2000
				4.3333	0.1964
				4.7778	0.1607
				4.7778	0.1357
				4.8889	0.1250
				4.8889	0.1179
				5.2222	0.1107
				5.2222	0.1036
5.3333	0.0964				
				5.4444	0.0893
				5.8889	0.0643

Nilai Kritis Permutasi Eksak untuk ANOVA Satu Arah Kruskal-Wallis 71
pada Kasus Banyaknya Sampel, $k = 4$

Ukuran sampel				Nilai kritis (Statistik Uji)	α (p-value)
n_1	n_2	n_3	n_4		
				6.3333	0.0214
4	2	2	1	3.9167	0.2976
				4.0000	0.2833
				4.0833	0.2738
				4.2083	0.2429
				4.3333	0.2000
				4.4583	0.1905
				4.5000	0.1810
				4.5833	0.1714
				4.7500	0.1333
				4.7917	0.1286
				5.0000	0.1190
				5.2083	0.1143
				5.2500	0.0905
				5.4167	0.0762
				5.4583	0.0714
				5.8333	0.0429
				6.0833	0.0286
5	1	1	1	4.1333	0.2857
				4.5333	0.1786
				5.3333	0.0714

5. Daftar Pustaka

- Daniel, W. W. 1989, *Statistik Nonparametrik Terapan*, Jakarta: PT Gramedia.
 Gibbons, J. D. 1971, *Nonparametric Statistical Inference*, Tokyo: Mc. Graw-Hill.
 Odiase, J. I. dan Ogbonmwan, S. M. (2005). Exact Permutation Critical Values for the Kruskal-Wallis One-way ANOVA. *Journal Of Modern Applied Statistical Methods*, 4, 609-620.
 Siegel, S. 1985, *Statistika Nonparametrik untuk Ilmu-ilmu Sosial*, Jakarta: PT Gramedia.
 Walpole, R. E. 1988, *Pengantar Statistika*, Jakarta: PT Gramedia.
 Walpole, R. E. dan Myers, R. H. 1995, *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*, Bandung: Penerbit ITB.