Statistika, Vol. 8 No. 1, 13 – 17
Mei 2008

Selang Kepercayaan dari Parameter Distribusi Log-Normal Menggunakan Metode Bootstrap Persentil

AKHMAD FAUZY
Jurusan Statistika FMIPA Universitas Islam Indonesia Yogyakarta

ABSTRACT

In this article, two methods are proposed to give the interval estimation for two parameters Log-Normal distribution. We usually use traditional method to construct interval estimation. This interval needs a t distribution and chi-square distribution and namely traditional method. We will use another method, namely bootstrap percentile. Bootstrap percentile method more potential in constructing two parameters interval and give shorter interval than traditional method. This method does not need an assumption that the sample has to have t and chi-square distributions.

Keywords: bootstrap percentile method, interval estimation, traditional method

1. Latar Belakang

Untuk meningkatkan kualitas suatu produk hasil industri maka diperlukan suatu analisis uji hidup. Uji hidup tersebut sangat berguna dalam melakukan pengujian tentang daya tahan atau keandalan suatu produk hasil industri. Untuk mendapatkan data uji hidup biasanya orang melakukan eksperimen. Yang membedakan analisis uji hidup dengan bidang-bidang statistik lainnya adalah adanya penyensoran (Lawless, 2003).

Distribusi Log-Normal merupakan salah satu distribusi yang digunakan dalam bidang teknik, khususnya yang menyangkut analisis uji hidup (*survival analysis*). Untuk dapat memberikan gambaran yang baik tentang nilai parameter dari distribusi tersebut, biasanya dicari nilai selang kepercayaannya. Bury (1999) telah menguraikan suatu metode untuk mencari selang kepercayaan dari dua parameter distribusi Log-Normal. Perhitungan selang tersebut memerlukan bantuan distribusi t dan chi-kuadrat.

Di dalam bidang statistika ada metode yang relatif baru yang dipergunakan untuk menghitung selang. Metode tersebut adalah metode bootstrap persentil. Metode bootstrap persentil adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk digunakan pada masalah-masalah ketidakstabilan dan keakurasian, khususnya dalam menentukan selang. Selang yang dihasilkan tidak memerlukan bantuan distribusi (Efron dan Tibshirani, 1993).

Metode bootstrap persentil perlu dicoba untuk mencari selang kepercayaan bagi dua parameter dari distribusi Log-Normal.

1.1 Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa selang kepercayaan dari dua parameter distribusi Log-Normal yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil akan lebih baik apabila dibandingkan dengan menggunakan metode tradisional seperti yang selama ini kita gunakan.

1.2 Perumusan Masalah

Ada dua masalah yang harus diselesaikan dalam penelitian ini. Masalah yang pertama adalah menduga selang kepercayaan dari dua parameter distribusi Log-Normal dengan metode tradisional dan metode bootstrap persentil. Masalah yang kedua adalah membandingkan kedua selang tersebut.

1.3 Metode

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data buatan (*artificial*). Data tersebut dihasilkan dengan bantuan paket program Minitab 14. Langkah pertama adalah membuat selang kepercayaan dari dua parameter distribusi Log-Normal dengan metode tradisional. Langkah selanjutnya adalah mencari nilai ulangan bootstrap yang menunjukkan kondisi konvergen. Setelah diketahui kondisi konvergennya, maka selang dengan metode bootstrap persentil dapat dicari. Kemudian hasil selang antara metode tradisional dengan metode bootstrap persentil dapat dibandingkan.

2. Landasan Teori

2.1 Metode Tradisional

Fungsi kepadatan probabilitas distribusi Log-Normal dengan dua parameter, μ dan σ adalah sebagai berikut (Ireson, 1996):

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{1}$$

$$\text{dengan } x > 0\,;\, \sigma > 0 \text{ dan } -\infty < \mu < \infty$$

Selanjutnya Bury (1999) telah menguraikan rumus untuk mencari selang kepercayaan bagi μ, yaitu:

$$\exp\left\{\bar{x} + t_{(n-1;\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} < \mu < \exp\left\{\bar{x} - t_{(n-1;\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} \tag{2}$$

dan selang kepercayaan bagi σ yaitu:

$$\sqrt{\exp\left\{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{(n-1;1-\alpha/2)}}\right\}-1} < \sigma < \sqrt{\exp\left\{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{(n-1;\alpha/2)}}\right\}-1} \tag{3}$$

2.2 Metode Bootstrap Persentil

Metode bootstrap adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah ketakstabilan dan keakurasian, khususnya dalam menentukan selang. Istilah bootstrap berasal dari "*pull oneself up by one's bootstrap*", yang berarti berpijak di atas kaki sendiri, berusaha dengan sumber daya minimal. Dalam sudut pandang statistika, sumber daya yang minimal adalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsi tertentu, atau data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya (Fauzy, 2000).

Tujuan dari penggunaan metode bootstrap adalah untuk mendapatkan pendugaan yang sebaik-baiknya yang berasal dari data yang minimal. Dengan demikian penggunaan komputer dalam metode bootstrap mutlak diperlukan (Fauzy, 1998).

Secara umum prosedur bootstrap persentil untuk menduga selang kepercayaan dari satu parameter distribusi Log-Normal di bawah sensor lengkap adalah sebagai berikut:

1. Berikan peluang yang sama $1/n$ pada setiap data tersensor lengkap berukuran *n*,
2. Mengambil suatu sampel berulang secara acak berukuran *n* dengan pengembalian,
3. Ulangi langkah 2 sebanyak *B* kali untuk mendapatkan "*independent bootstrap replications*" $\hat{\beta}_n^{*1}, \hat{\beta}_n^{*2}, \ldots, \hat{\beta}_n^{*B}$ dan mencari pada ulangan keberapa tercapai kondisi konvergen. Hitung rata-rata *b* yaitu:

$$\hat{\beta}_n^* = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\beta}_n^{*i} \quad \text{dan} \quad \text{dev}(b) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(\hat{\beta}_n^{*i} - \bar{b})^2}\ , \tag{4}$$

4. Selang kepercayaan *Bootstrap* persentil bagi μ dan σ pada tingkat kepercayaan 1 - α didefinisikan dengan persentil ke-100(α/2) dan ke-100(1-α/2) pada $\hat{\beta}_n^*$, sehingga selang persentil dapat dinyatakan dengan:

$$\left[\hat{\beta}_n^{*(\alpha/2)}, \hat{\beta}_n^{*(1-\alpha/2)}\right] \text{dan } \left[\text{dev}(b)^{(\alpha/2)}, \text{dev}(b)^{(1-\alpha/2)}\right] \tag{5}$$

3. Hasil dan Pembahasan

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data buatan (*artificial*). Data tersebut dihasilkan dengan bantuan paket program Minitab 13. Data yang dibangkitkan sebanyak 18 data dengan distribusi Log-Normal. Ke-18 data tersebut misalkan mencerminkan data tahan hidup (dalam hari) dari 18 bola lampu.

Tabel 1. Data tahan hidup dari 18 bola lampu (dalam hari)

No.	Tahan Hidup	No.	Tahan Hidup	No.	Tahan Hidup
1	127.42	7	258.36	13	254.13
2	145.36	8	28.89	14	40.40
3	216.53	9	51.03	15	60.65
4	142.84	10	253.38	16	252.71
5	79.97	11	208.55	17	494.67
6	304.95	12	64.24	18	1162.59

Sumber: data artificial

3.1 Metode Tradisional

Rumus yang digunakan untuk mencari selang kepercayaan bagi μ, yaitu:

$$\exp\left\{\bar{x} + t_{(n-1;\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} < \mu < \exp\left\{\bar{x} - t_{(n-1;\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$$

Nilai rata-rata dari data tahan hidup di atas adalah 230.371 hari. Dengan menggunakan rumus di atas maka batas bawah, batas atas dan lebar selang bagi μ pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % dapat diperoleh.

Tabel 2. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi μ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	BB	BA	LS
99 %	51.861	408.880	357.019
95 %	100.422	360.319	259.897

Rumus yang digunakan untuk mencari selang kepercayaan bagi σ, yaitu:

$$\sqrt{\exp\left\{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{(n-1;1-\alpha/2)}}\right\} - 1} < \sigma < \sqrt{\exp\left\{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{(n-1;\alpha/2)}}\right\} - 1}$$

Nilai deviasi standar dari data tahan hidup di atas adalah 261.315 hari. Dengan menggunakan rumus di atas maka batas bawah, batas atas dan lebar selang bagi σ pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % dapat diperoleh.

Tabel 3. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi σ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	BB	BA	LS
99 %	180.278	451.396	271.118
95 %	196.087	391.748	195.661

3.2 Metode Bootstrap Persentil

Kondisi konvergen tercapai pada ulangan bootstrap ke-2500. Nilai μ dan σ dari data tahan hidup pada ulangan tersebut adalah 228.755 hari dan 232.016 hari. Selang bootstrap persentil bagi kedua parameter tersebut pada tingkat kepercayaan 99 % dan 95 % dapat dilihat pada tabel 4 dan 5 di bawah ini.

Tabel 4. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi μ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	BB	BA	LS
99 %	111.744	409.609	297.865
95 %	133.481	362.447	228.966

Tabel 5. Batas bawah (BB), batas atas (BA) dan lebar selang (LS) bagi σ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

TK	BB	BA	LS
99 %	174.078	441.704	267.626
95 %	213.184	402.026	188.842

3.3 Perbandingan Lebar Selang

Perbandingan lebar selang kepercayaan dari dua parameter distribusi Log-Normal yang dihasilkan oleh metode tradisional dan metode bootstrap persentil dapat dilihat pada tabel 6 dan 7.

Tabel 6. Perbandingan lebar selang bagi μ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

Metode	TK	
	99 %	95 %
Tradisional	357.019	259.897
Bootstrap persentil	297.865	228.966
Selisih selang	59.154	30.931

Tabel 7. Perbandingan lebar selang bagi σ pada tingkat kepercayaan (TK) 99 % dan 95 %

Metode	TK	
	99 %	95 %
Tradisional	271.118	195.661
Bootstrap persentil	267.626	188.842
Selisih selang	3.492	6.819

Selang yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil lebih pendek dari pada yang dihasilkan oleh metode tradisional. Hal ini bisa dilihat pada tabel 6 dan 7, dimana terjadi selisih lebar selang yang cukup besar antara kedua metode tersebut. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa metode bootstrap persentil lebih baik dari pada metode tradisional, karena metode bootstrap persentil menghasilkan lebar selang yang lebih pendek.

4. Kesimpulan

Metode yang lebih baik di dalam menduga selang kepercayaan bagi dua parameter distribusi Log-Normal adalah metode bootstrap persentil. Metode tersebut menghasilkan lebar selang yang lebih sempit apabila dibandingkan dengan metode tradisional. Metode tersebut juga tidak memerlukan asumsi distribusi.

Daftar Pustaka

[1] Bury, K. 1999. *Statistical distributions in engineering*. Cambridge: Cambridge University Press.
[2] Efron, B., dan Tibshirani, R. 1993. *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall.
[3] Fauzy, A. 1998. *Selang kepercayaan untuk koefisien β_1 dari garis regresi apabila ragam galat tidak homogen dengan metode OLS, WLS dan bootstrap*. Thesis. Bogor: IPB Bogor.
[4] Fauzy, A. 2000. Estimasi interval konfidensi dari nilai rata-rata pada sampel berdistribusi t dengan metode bootstrap persentil. *MIHMI*, 6(5), 241-245.
[5] Ireson, W. G. 1996. *Handbook of reliability engineering and management* (2nd ed.). New York: McGraw Hill.
[6] Lawless, J. F. 2003. *Statistical models and methods for lifetime data* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.